

С.В. Клименко, В.В. Огоренко, В.Д. Халипова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САМООЦЕНКИ ПСИХИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛИЧНОСТИ

Аннотация. Предложена математическая модель процесса психометрического тестирования путем общения человека с компьютером с целью самооценки его трех психических свойств (самочувствия, мыслительной активности, настроения). Рассмотрены алгоритмы обработки результатов тестирования и принятия решения о состоянии исследуемых свойств личности.

Ключевые слова: психометрическое тестирование, статистическая обработка данных, математическое моделирование.

Постановка задачи

Каждый, очевидно, знает, что означают для него слова: 1) самочувствие, 2) настроение, 3) активность. Но вот дать краткую оценку состояния каждого из этих душевных свойств не так просто. Мы часто на вопрос «Как твоё настроение?.. самочувствие?» слышим ответ: « Прекрасное», «Неважное», «Ничего, так себе», или «Все хорошо», «Хуже не бывает». Что под этим кроется – мы понимаем. Ответы хотя и нечеткие, размытые, но содержат информацию, которую мы воспринимаем и после одного из таких ответов даже можем спросить «Что-то случилось?».

Психологи изучали эти сравнительно кратковременные состояния этих свойств психики людей и определили, что для их описания используются множество показателей с различной степенью выраженности. Например, о самочувствии могут сказать: прекрасное, или хорошее, или никакое, или плохое, или хуже не бывает. Или о настроении: самый счастливый, счастливый, не жалею, счастья нет, самый несчастный. Активность: высокая (не могу без дела), удовлетворительная (надо, делаю), нормальная (не спешу), плохая (все делаю с трудом), очень плохая (просто бездельничаю).

Таковыми или другими словами люди, опираясь на свой жизненный опыт и знания, оценивают качество или состояния объектов,

процессов деятельности и их результатов. Каждый из нас таким образом может оценивать и свои душевные свойства, в том числе и самочувствие, активность мыслительной деятельности и настроение [1].

Мы живем в мире причинно-следственных связей и на наше душевное состояние влияет множество различных причин. Заболела голова – самочувствие плохое, делать и думать ничего не хочется, настроение отвратительное. Все ясно без всяких исследований и психологов. Но вот вроде и причины никакой нет, а с нами происходит что-то не то. Вот здесь без помощи психологов и современных психометрических информационных технологий не обойтись.

Каждое из этих трех исследуемых свойств личности (самочувствие, активность, настроение) психологи предложили описывать десятью парами слов, которые характеризуют их крайние степени выраженности от очень хорошего до очень плохого, от очень активного до очень пассивного, от прекрасного до ужасного. При тестировании предлагается по этим двум словам, характеризующих душевное состояние, выбрать один из пяти вариантов ответа: 1) очень хорошо; 2) хорошо; 3) нормально (удовлетворительно); 4) плохо; 5) очень плохо.

По этим оценкам должны приниматься решения о самочувствии личности, ее активности и настроении. Предполагается, что принимаемые решения можно рассматривать как случайные события и результаты тестирования обрабатывать методами математической статистики. Рассматривается задача математического моделирования такого процесса психометрического тестирования и обоснования правила принятия решения о душевном состоянии личности путем оценки психометрических показателей самочувствия, активности, настроения, а также интерпретация полученных результатов.

Математическая модель психометрического тестирования

Каждый из ответов будем оценивать по пятибалльной системе – числами 5,4,3,2,1. Так как ответы-решения являются случайными событиями, то их оценки – дискретные случайные величины. Статистические закономерности их зависят от состояния тестируемой личности. При очень хорошем состоянии исследуемого свойства наиболее вероятные решения будут оцениваться числами 5 и 4, при очень плохом – 1 и 2. Если состояние человека обычное, нормальное, без крайних степеней выраженности, то чаще всего будут использоваться оценки 2,3,4, причем среди них наиболее вероятной оценкой будет 3.

Математические модели оценок как условные законы распределения вероятностей всех трех свойств можно описать в виде

- 1) при плохом и хорошем состоянии m -го свойства ($m=1,2,3$)

$$P_1(i / m) = \frac{(6-i)^2}{55} \quad \text{и} \quad P_3(i / m) = \frac{i^2}{55}, \quad (1)$$

- 2) при обычном, нормальном состоянии m -го свойства

$$P_2(i / m) = \frac{i^2}{19} \operatorname{sgn}(3-i) + \frac{(6-i)^2}{19} \operatorname{sgn}(i-4), \quad (2)$$

где $\operatorname{sgn}(x)$ – функция единичного скачка, равная нулю, если $x = 0$ и единице, если $x \geq 0$, $P_j(i / m)$ – вероятности появления i -й оценки при j -м состоянии, $j=1,2,3$.

Психическое состояние человека – это результат влияния на психику тех или иных факторов, причин внутренних и внешних. Эти причинно-следственные связи могут по-разному отражаться на психике людей. В одном крайнем случае они могут одинаково влиять на все три исследуемые свойства (все прекрасно, или все нормально, или все плохо). И тогда статистические закономерности решений будут одинаковыми для всех трех свойств личности. Если у каждого свойства может быть своя причина психического состояния, то оценки состояний являются независимыми случайными изменениями и если их причины равновероятны, то обобщенный закон распределения всех измерений $P_0(i)$ запишется в виде

$$P_0(i) = \frac{1}{3} [P_1(i / m) + P_2(i / m) + P_3(i / m)].$$

На рис.1. представлены графики моделей законов распределения вероятностей дискретных показателей состояния каждого из исследуемых свойств.

Определим математические ожидания $M(j / m)$ и дисперсии $D(j / m)$ оценок по формулам

$$M(j / m) = \sum_{i=1}^5 iP_j(i / m), \quad D(j / m) = \sum_{i=1}^5 (i - M(j / m))^2 P_j(i / m), \quad j=0,1,2,3, \quad (3)$$

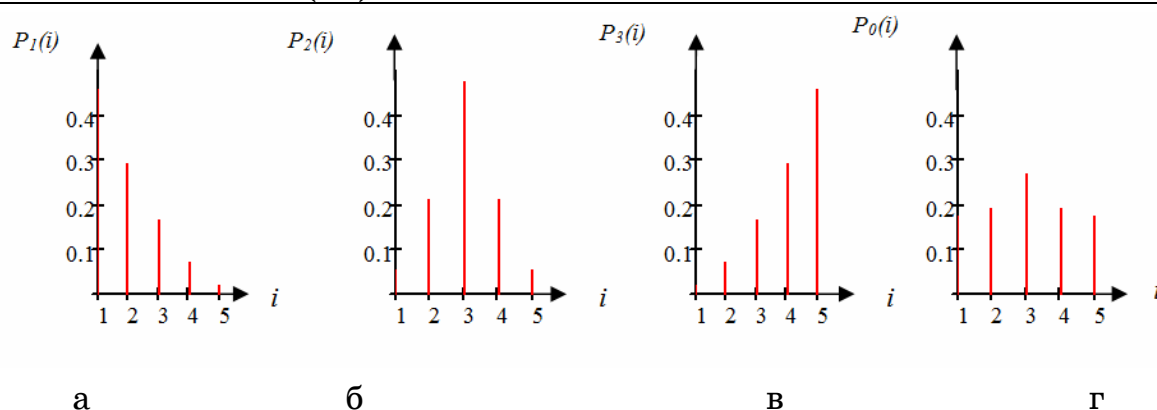


Рисунок 1 - Модели законов распределения вероятностей показателей состояния свойств плохого (а), хорошего (б), нормального (в), обобщенного (г)

Полученные по формулам (3) числовые значения математических ожиданий и дисперсий, представлены в табл.1. Они одинаковые для всех трех исследуемых свойств, если свойства не влияют друг на друга.

Таблица 1

Плохое состояние		Нормальное состояние		Хорошее состояние		Обобщенная оценка	
M_1	D_1	M_2	D_2	M_3	D_3	M_4	D_4
1,909	1,064	3	0,842	4,091	1,064	3	1,064

Как видно из данных таблицы, при обобщенной оценке имеет место увеличение дисперсии, как результат большие вероятности расброса ответов-решений и как признак независимости причин, влияющих на самочувствие, активность, настроение.

Результаты тестирования m -го свойства – это по 10 решений случайных выборов оценок $R(k/m)$ каждого из трех состояний ($m=1,2,3$) в виде числовых показателей 1,2,3,4,5. Их первичная обработка – это оценки трех средних значений по формуле

$$\bar{R}_m = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} R(k/m), \quad (4)$$

где k – номер стимула ($k=1,2,\dots,10$).

Так как $R(k/m)$ – случайные величины со своими законами распределения и из теории вероятностей известно, что сумма десяти и больше случайных величин тоже случайные величины с законами

распределения, близкими к закону Гаусса с параметрами $M_j[\bar{R}] = M_j$ [2]. Их дисперсии \bar{D}_j в 10 раз меньше дисперсий случайных оценок i и равны соответственно 0,106; 0,0842; 0,1064.

Оценки параметров $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ содержат информацию о степени выраженности в каждом из трех исследуемых свойств личности (самочувствии, активности, настроении), в каком из трех состояний (плохом – 1, нормальном – 2 или хорошем – 3) они находятся. Это задача распознавания исследуемого m -го свойства по оценке \bar{R}_m одного из трех ($j=1,2,3$) возможных его состояний: 1) плохого, 2) нормального, 3) хорошего. Для принятия решений определяются два порога сравнения \bar{R}_{01} и \bar{R}_{02} [3].

Пороговые значения для оценки этих состояний определим как точки \bar{R}_{01} и \bar{R}_{02} пересечения условных законов распределений вероятностей оценок \bar{R} при плохом и нормальном состоянии (1,2) и при нормальном и хорошем состоянии (2,3). Уравнения запишем в виде

$$W_1(\bar{R}) = W_2(\bar{R}) \quad \text{и} \quad W_2(\bar{R}) = W_3(\bar{R});$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_1}} \exp\left(-\frac{(\bar{R} - M_1)^2}{2D_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_2}} \exp\left(-\frac{(\bar{R} - M_2)^2}{2D_2}\right); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi D_2}} \exp\left(-\frac{(\bar{R} - M_2)^2}{2D_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_3}} \exp\left(-\frac{(\bar{R} - M_3)^2}{2D_3}\right). \end{cases}$$

Решив их, получим значения порогов \bar{R}_{01} и \bar{R}_{02} . Расчетные формулы для вычисления \bar{R}_{01} и \bar{R}_{02} имеют вид

$$\bar{R}_{01} = \frac{b_1 - \sqrt{(b_1^2 - 4B_1c_1)}}{2B_1}; \quad \bar{R}_{02} = \frac{b_2 - \sqrt{(b_2^2 - 4B_2c_2)}}{2B_2}, \quad (5)$$

где $B_1, B_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ - коэффициенты уравнений, зависящие от математических ожиданий M_j и дисперсий D_j плохого ($j=1$), нормального

го ($j=2$), хорошего ($j=3$) состояний, которые равны

$$\begin{aligned} B_1 &= D_1 - D_2, \quad b_1 = 2(D_1M_2 - D_2M_1), \\ c_1 &= 2D_1D_2\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{D_1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{D_2}}\right)\right) + D_1M_2^2 - D_2M_1^2, \end{aligned}$$

$$B_2 = D_2 - D_3, \quad b_2 = 2(D_2M_3 - D_3M_2),$$

$$c_2 = 2D_3D_2 \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{D_2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{D_3}}\right) \right) + D_2M_3^2 - D_3M_2^2.$$

Значения порогов равны $\bar{R}_{01}=2,476$ и $\bar{R}_{02}=3,524$.

Решающие правила оценки состояния по экспериментальному значению \bar{R}_m запишутся в виде: 1) если $\bar{R}_{01} \leq \bar{R}_m \leq \bar{R}_{02}$, то состояние свойства m в норме; 2) если $\bar{R}_m \leq \bar{R}_{01}$, то состояние свойства m плохое; 3) если $\bar{R}_m \geq \bar{R}_{02}$, то состояние свойства m хорошее.

Определим теперь ожидаемые значения условных вероятностей принятия правильных решений о плохом, нормальном и хорошем состоянии личности по формулам

$$P(\text{п/п}) = \int_{-\infty}^{\bar{R}_{01}} W_1(\bar{R})d\bar{R}; \quad P(\text{н/н}) = \int_{\bar{R}_{01}}^{\bar{R}_{02}} W_2(\bar{R})d\bar{R}; \quad P(\text{х/х}) = \int_{\bar{R}_{02}}^{\infty} W_3(\bar{R})d\bar{R}. \quad (6)$$

Значения этих вероятностей, рассчитанные по формулам (6), равны $P(\text{п/п})=0,959$, $P(\text{н/н})=0,929$, $P(\text{х/х})=0,959$.

Таким образом, при выбранных моделях законов распределения независимых измерений в виде квадратичных функций и рассчитанных порогах сравнения, теоретические оценки вероятностей правильных решений больше 0,925 и их можно использовать при компьютерном психометрическом тестировании.

По результатам тестирования можно также оценить наличие или отсутствие причинно-следственных связей между состояниями самочувствия, активности и настроения: не является ли, например, плохое самочувствие причиной плохих и настроения, и активности, а если оно в норме, то они тоже будут находиться в норме.

При сильной статистической связи между оценками степени выраженности состояния самочувствия, активности и настроения у них будут близкими между собой законы распределения вероятностей измерений, и, следовательно, также и их средние значения $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$. Эту гипотезу всегда можно проверить по критерию Стьюдента.

Если такой связи нет, то состояние исследуемых свойств личности не зависят друг от друга, у каждого из них свои статистические закономерности, различные средние значения, а в обобщенной выборке ожидаемое среднее равно 3, дисперсия измерений почти в 1,7

раза больше, чем у оценок каждого из свойств. Именно эти признаки характерны при отсутствии причинно-следственных связей между исследуемыми психическими свойствами (самочувствием, мыслительной активностью, настроением).

Вычислительный эксперимент

Решение о степени выраженности исследуемых состояний, которые принимаются при тестировании, формируются как выборки дискретных независимых случайных величин с известными законами распределения вероятностей $P_j(i/m)$ в виде (1) и (2). Располагая тремя генераторами выборок $r_j(k)$ независимых случайных величин с равномерным законом распределения вероятностей можно путем их преобразования моделировать выборки оценок принимаемых решений $R_j(k)$ по формулам

$$R_j(k) = \sum_{i=1}^5 \operatorname{sgn}[F_j(i) - r_j(k)], \quad F_j(i) = \sum_{m=1}^i P_j(i/m).$$

Здесь $F_j(i)$ дискретная функция распределения вероятности и $F_j(5)=1$, k – номер стимула ($k=1,2,\dots,10$; $j=1,2,3$).

Результаты моделирования – это средние значения оценок \bar{R}_j и выборочные дисперсии

$$\bar{R}_j = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} R_j(k), \quad D_j^* = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (R_j(k) - \bar{R}_j)^2.$$

Обобщенные среднее и выборочная дисперсия равны

$$\bar{R}_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \bar{R}_j, \quad D_0^* = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (\bar{R}_0 - R_1(k) - R_2(10+k) - R_3(20+k))^2.$$

Работоспособность программы компьютерной модели проверялись путем генерирования N выборок случайных величин $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_0$ и их выборочных дисперсий $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3, \bar{D}_0$, построения гистограмм и вычисления усредненных значений (таблица 2).

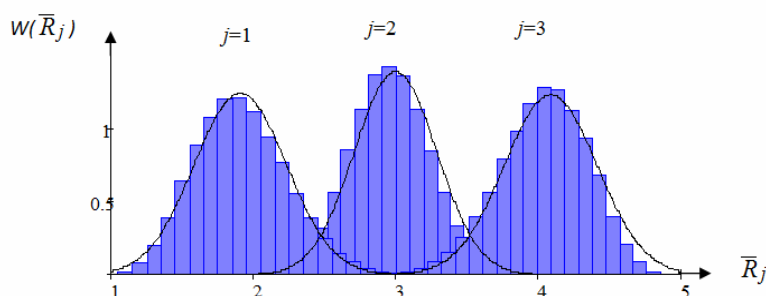


Рисунок 2 - Гистограммы распределения средних для трех состояний психических свойств испытуемых

Состояния							
Плохое		Нормальное		Хорошее		Обобщенные измерения	
$M[\overline{R}_1^*]$	$D[\overline{R}_1^*]$	$M[\overline{R}_2^*]$	$D[\overline{R}_2^*]$	$M[\overline{R}_3^*]$	$D[\overline{R}_3^*]$	$M[\overline{R}_0^*]$	$M[\overline{R}_0^*]$
1,91	0,105	3	0,084	4,09	0,107	3	1,812

Из анализа результатов вычислительного эксперимента следует вывод о нормальной работоспособности программы: данные вычислительного эксперимента мало отличаются от теоретических значений.

Реальные измерения самооценки одного процесса тестирования представляют собой матрицу из 30 измерений $R_j(k)$, $j=1,2,3$, $k=1,2,\dots,10$. Результаты статистической обработки для визуально-аналитического анализа представлены в виде таблицы 3.

Таблица 3

Представление результатов статистической обработки измерений самооценки для одного процесса тестирования. При условии пороговых значений $\overline{R}_{01}=2,476$ и $\overline{R}_{02}=3,524$

Оценки	О	С	А	Н
\overline{R}^*	$\overline{R}_0^* = 2,8$	$\overline{R}_1^* = 4,1$	$\overline{R}_2^* = 2,8$	$\overline{R}_3^* = 1,5$
$\sqrt{\overline{D}^*}$	$\Delta\overline{R}_0^* = 2,028$	$\Delta\overline{R}_1^* = 0,989$	$\Delta\overline{R}_2^* = 0,844$	$\Delta\overline{R}_3^* = 0,944$
Оценки состояния	Х		Н	П
Оценки корреляции	СА		СН	АН
	$\rho_{12}^* = 0,024$		$\rho_{13}^* = -0,287$	$\rho_{23}^* = 0,124$

Здесь в таблице 3 обозначено: О – обобщенные измерения; С – измерения самочувствия; А – измерения мыслительной активности; Н – измерения настроения; $\Delta\overline{R}$ – разброс измерений (корень квадратный из выборочных дисперсий); хорошо (Х), нормально (Н), плохо (П) – оценки состояния ($\overline{R}_1 \geq \overline{R}_{02}$, $\overline{R}_{01} \leq \overline{R}_2 \leq \overline{R}_{02}$, $\overline{R}_3 \leq \overline{R}_{01}$). В таблице представлен случай хорошего самочувствия, нормальной активности, плохого настроения испытуемого.

Предполагается, что самооценка исследуемых свойств личности – это не единичное, а периодическое тестирование. Для повышения ее информативности необходимо проводить сравнительный анализ ре-

зультатов мониторинга с поисками внутренних и внешних факторов, их порождающих.

Выводы

1. Разработана математическая модель самооценки психических свойств личности, в которой представлены законы распределения вероятностей ответов-решений для разных состояний свойств психики. Рассмотрены законы распределения средних значений ответов для каждого состояния и найдены пороговые значения, необходимые для определения выраженности свойства.

2. Разработана психометрическая методика самооценки трех душевных свойств личности путем общения компьютера и человека; с экрана компьютера ему предлагаются вопросы, в нечетких ответах которых содержится информация о состоянии его самочувствия, мыслительной активности и настроения.

3. Оценки психометрического тестирования рассматриваются как выборки дискретных случайных величин с заданными законами распределения вероятности. Предложены алгоритмы их обработки и формирования данных для анализа и принятия решений о состоянии трех исследуемых свойств личности.

4. Разработана компьютерная модель психометрического тестирования и проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие работоспособность предложенной методики самооценки состояния самочувствия, активности и настроения личности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райгородский Д.Я. Практическая психодиагностика. Методики и тесты. Учебное пособие.– Самара: Издательский дом «БАХРАХ», 1998-672 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006.-816с.
3. В.П. Малайчук, А.В. Мозговой. Математическая дефектоскопия: Монография.– Днепропетровск: Системные технологии, –2005. - 180с.