УДК 620

В.Є. Білозьоров, О.С. Мищенко

ПРО ГОМОКЛІНІЧНІ ОРБІТИ ДВОВИМІРНИХ АВТОНОМНИХ КВАДРАТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Анотація. Представленні нові умови існування гомоклінічних орбіт для широкого класу двовимірних автономних квадратичних динамічних систем.

Ключові слова: гомоклінічна орбіта, лінійне перетворення, точка рівноваги, сідло, граничний цикл, фокус, стійкий вузол.

Вступ

Протягом багатьох десятиліть хаотична поведінка динамічних систем залишається в центрі уваги математиків, фізиків та інженерів. Існують сотні публікацій, в яких у різних формах обмірковується та досліджується це явища [1] - [4]. Слід зазначити, що однією з причин виникнення хаосу у тривимірних динамічних системах є існування в цих системах гомоклінічних орбіт.

Постановка задачі

Очевидно, що присутність гомоклінічної траєкторії у тривимірній системі гарантує, що буде існувати та ж сама орбіта в будь-якій проекції цієї системи на будь-яку координатну площину. У зв'язку з цим в статті розглядаються достатні умови існування гомоклінічних орбіт у двовимірних квадратичних системах. В майбутньому ці умови будуть використовуватися для пошуку гомоклінічних орбіт у тривимірних квадратичних системах.

Основна частина

Розглянемо двовимірну систему автономних квадратичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_{11}x^2(t) + 2b_{12}x(t)y(t) + b_{22}y^2(t) \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + c_{11}x^2(t) + 2c_{12}x(t)y(t) + c_{22}y^2(t) \end{cases} \quad (1)$$

у якій $a_{11},\ldots,\ a_{22}, b_{11},\ldots,\ b_{22}, c_{11},\ldots,\ c_{22}$ дійсні числа.

 ISSN 1562-9945

Нагадаємо, що обмежена траєкторія системи (1) називається гомоклінічною орбітою, якщо траєкторія збігається до однієї і тієї ж точки рівноваги при $t \to \pm\infty$ [3].

Введемо наступні дійсні (2×2) - матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ T_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ c_{11} & c_{12} \end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Замінимо змінні x, y у системі (1) на нові змінні x_1, y_1 за формулою:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

у якій S - лінійне перетворення з групи $GL(2, R)$ всіх лінійних зворотних перетворень простору R^2 [2,5]. В цьому випадку трійка матриць (A, T_1, T_2) трансформується у трійку вигляду $S \circ (A, T_1, T_2) = \left(S^{-1}AS, \left(S^{-1}T_1, S^{-1}T_2\right) \cdot (S \otimes S)\right)$.

Слід пам'ятати, що скалярний многочлен $f(A, T_1, T_2)$ називається інваріантом ваги l у групі $GL(2, R)$, якщо $\forall S \in GL(2, R)$ та $\forall (A, T_1, T_2)$ $f(S \circ (A, T_1, T_2)) = (det\ S)^l \cdot f(A, T_1, T_2)$, де $l \geq 0$ деяке ціле число [2,5].

За допомогою матриць T_1, T_2, побудуємо допоміжну незалежну від елементів матриці A систему інваріантів

$$I_1 = det\begin{pmatrix} (trT_1, trT_2) \cdot T_1 \\ (trT_1, trT_2) \cdot T_2 \end{pmatrix},\ J_2 = det(T_1T_2 - T_2T_1),$$

$$K_3 = det\begin{pmatrix} trT_1, trT_2 \\ (trT_1, trT_2) \cdot (T_1T_2 - T_2T_1) \end{pmatrix},$$

ваги 2[2]; де trP - слід квадратної матриці P.

Тепер ми можемо ввести основні інваріанти

$$L = I_1 - J_2 - K_3, D = I_1 + 27J_2 - 5K_3 \qquad (3)$$

ваги 2[2].

Умови існування гомоклінічних орбіт у системі (1)

Лема 1. Нехай $L = 0$ та $J_2 \neq 0$. Тоді існує лінійне обернене перетворення $x \to s_{11}x + s_{12}y$, $y \to s_{21}x + s_{22}y$ $(s_{11}s_{22} - s_{21}s_{12} \neq 0)$ таке, що у нових змінних система (1) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + 2b_{12}x(t)y(t) + b_{22}y^2(t) \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + 2c_{12}x(t)y(t) + c_{22}y^2(t) \end{cases}. \quad (4)$$

(З метою подальшого спрощення, ми залишили в системі (4) позначення, прийняті в системі (1). Ми діятимемо таким чином і в подальших міркуваннях.)

Доведення. Якщо $b_{11} = c_{11} = 0$ (or $b_{22} = c_{22} = 0$), тоді Лема 1 доведена. Тому, ми припускаємо, що в системі (1) $b_{11} \neq 0$ та $b_{22} \neq 0$. Тоді за допомогою відповідного лінійного перетворення $S \in GL(2, R)$ [2] система (1) може бути перетоврена у систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_{11}x^2(t) + b_{22}y^2(t) \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + 2c_{12}x(t)y(t) + c_{22}y^2(t) \end{cases} \quad (5)$$

Далі, для системи (5) ми маємо:

$$I_1 = (b_{11} + c_{12})^2 b_{11}b_{22} + (b_{11} + c_{12})b_{11}c_{22}^2 - c_{12}^2c_{22}^2,$$

$$J_2 = c_{12}b_{22}(c_{12} - b_{11})^2 \neq 0,$$

$$K_3 = (b_{11} + c_{12})^2(b_{11}b_{22} - b_{22}c_{12}) - c_{22}^2\left(c_{12}^2 - b_{11}c_{12}\right)$$

та

$$L = b_{11}\left(4b_{22}c_{12}^2 + b_{11}c_{22}^2\right).$$

Нехай $L = 0$. Якщо $b_{11} = 0$, тоді доведення завершено; якщо $b_{11} \neq 0$, тоді ми маємо, що $4b_{22}c_{12}^2 + b_{11}c_{22}^2 = 0.$

Введемо в систему (5) нові змінні за формулою

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Тоді ми отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \ldots + b_{11}x^2 + b_{22}(kx + y)^2 \\ \dot{y}(t) = \ldots - b_{11}kx^2 - b_{22}k(kx + y)^2 + 2c_{12}x(kx + y) + c_{22}(kx + y)^2 \end{cases} \quad (6)$$

 ISSN 1562-9945

Для того, щоб знищити член x^2 у першому рівнянні системи (6), необхідно покласти $k^2 = -b_{11}/b_{22}$. Для реалізації подібної процедури у другому рівнянні системи (6), умова, що

$$k^2 = \left(-\frac{2c_{12}}{c_{22}}\right)^2 = -\frac{b_{11}}{b_{22}},$$

повинна виконуватися. Ця умова має вигляд $4b_{22}c_{12}^2 + b_{11}c_{22}^2 = 0.$

Таким чином система (5) може бути перетворена у вигляд системи (4).

Лема 2. Нехай $\det A < 0$ та $J_2 < 0$. Тоді система (4) має 3 положення рівноваги: $O = (0,0), O_1 = (p_{1_x}, p_{1_y} > 0), O_2 = (p_{2_x}, p_{2_y} < 0)$.

Доведення. Положення рівноваги системи (4) можуть бути визначені з системи

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 = 0 \end{cases}$$

Звідси слідує, що

$$x = -y\,\frac{a_{22} + c_{22}y}{a_{21} + 2c_{12}y},$$

та

$$2(b_{22}c_{12} - b_{12}c_{22})y^2 - (2b_{12}a_{22} + a_{11}c_{22} - 2c_{12}a_{12} - b_{22}a_{21})y - det\,A = 0.$$

Таким чином маємо

$$y_{1,2} = \frac{c_{12}^2(2b_{12}a_{22} + a_{11}c_{22} - 2c_{12}a_{12} - b_{22}a_{21})}{4J_2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{4J_2},$$

де $\Delta = c_{12}^4(2b_{12}a_{22} + a_{11}c_{22} - 2c_{12}a_{12} - b_{22}a_{21})^2 + 8c_{12}^2(det\,A)\cdot J_2$.

З умов Леми 2 маємо, що $\det A < 0$ та $J_2 = c_{12}^2(b_{22}c_{12} - b_{12}c_{22}) < 0$.

Звідси випливає, що $b_{22}c_{12} - b_{12}c_{22} < 0$ та $\Delta > 0$. Отже,

$$\sqrt{\Delta} > c_{12}^2\left|2b_{12}a_{22} + a_{11}c_{22} - 2c_{12}a_{12} - b_{22}a_{21}\right|.$$

Наслідком цього маємо $y_1 = p_{1_y} > 0$ і $y_2 = p_{2_y} < 0$. Доведенн завершено.

З Леми 2 випливає, що точка O_1(O_2) розташована у верхній (нижній) напівплощини.

Тепер вкажемо декілька ознак, які свідчать про можливе існування гомоклінічної орбіти в системі (4).

Для існування гомоклінічної орбіти (це петля сепаратриси) у точці рівноваги O необхідно, щоб ця точка була сідлом. Це досягається за допомогою нерівності $\det A < 0$. Крім того, існування петлі сепаратриси у системі (4) можливо лише за умови $D < 0$ [2].

Припустимо, що існує єдиний стійкий граничний цикл навколо точки O_1 в системі (4). Тоді ця точка повинна бути нестійким фокусом Крім того, ця точка може бути стійким фокусом. Тоді стійкий граничний цикл навколо точки O_1 існувати не буде. Точка O_1 розташована у верхній напівплощини.

Нехай $a_{12} = 0$. Тоді з умови $y(0) > 0$ слідує, що $\forall t > 0$ $y(t) > 0$ [2]. В цьому випадку ситема (4) може містити лише граничний цикл у верхній напівплощині і не мати гомоклінічної орбіти.

Припустимо, що при зміні параметрів в системі (4) граничний цикл втрачає стійкість і траєкторія відділяється від цього циклу та прагне до точки рівноваги O_2 (граничний цикл не існує навколо точки O_2). Тоді ця точка повинна бути стійким вузлом чи стійким фокусом. Вона розташовується у нижній напівплощині.

Розглянему іншу заміну змінних

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

в системі (4). Що стосується системи (4), то $J_2 = c_{12}^3 b_{22} \neq 0$, тоді $c_{12} \neq 0$ і система (4) може бути перетворена у систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_{22}y^2(t) \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + 2c_{12}x(t)y(t) + c_{22}y^2(t) \end{cases} \tag{8}$$

Крім того, можна вважати, що в системі (8) $b_{22} > 0$ та $c_{12} < 0$. (Відзначимо, що при умові $J_2 < 0$, за допомогою заміни $x \to -x$, можна легко прийти до умов $b_{22} > 0$ та $c_{12} < 0$.)

 ISSN 1562-9945

Нарешті, якщо замінити змінні за формулами $x \to -x/(2c_{12}), y \to -y/\sqrt{-2c_{12}b_{22}}$, тоді система (4) при $D < 0$ може бути перетворення у систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + y^2(t) \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) - x(t)y(t) + cy^2(t), |c| < 2. \end{cases} \qquad (9)$$

Тепер ми можемо скористатися наступним відомим результатом.

Теорема 1 [6]. Нехай $a_{11} < 0$. Тоді всі траєкторії квадратичної системи (9) обмеженні для $t \geq 0$.

Тоерема 2. Припустимо, що для системи (8) виконуються наступні умови

$a_{11} < 0, a_{21} < 0, det\ A < 0, D < 0$.

Тоді існує набір параметрів $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c$ таких, що систем (8) має гомоклінічну орбіту в точці O.

Доведення. Вище було показано, як за допомогою відповідних лінійних перетворень з системи (4) можна отримати систему (9).

Відзначимо, що з системи (9) і (8) маємо $b_{22} = 1,\ 2c_{12} = -1$. Для системи (8) $D = 4c_{12}^2\left(c_{22}^2 + 8c_{12}b_{22}\right) = c^2 - 4.$ Отже, з умови $D < 0$ слідує, що $J_2 = c_{12}^3 b_{22} < 0$;тоді $b_{22} > 0$, $c_{12} < 0$ та $|c| < 2$. Таким чином, умови $a_{11} < 0, D < 0$ гарантують обмеженність усіх розв'язків системи (8).

Нехай у системі (8) для спрощення $a_{12} = a_{21} = c = 0$. Припустимо, що деяка траєкторія S системи (8), що починається з точки поблизу точки O вздовж багатостатності $\mathrm{T}^{\mathrm{u}}(O)$, яке є дотичним до нестійкої багатостатності $\mathrm{M}^{\mathrm{u}}(O)$. В силу умови $\det A < 0$, маємо, що $a_{22} > 0$. Таким чином, $\mathrm{T}^{\mathrm{u}}(O)$ збігається з віссю OY .

З пунктів (а) - (в) слідує, що будь-яка траєкторія, яка починається у першому ортанті не залишить цей ортант. Для того, щоб деяка траєкторія, що починається у першому ортанті, залишила цей ортант чи наблизилилась до точки O необхідно, щоб поблизу з цією точкою ми мали у першому ортанті $\dot{x}(t) < 0, \dot{y}(t) < 0$. Отже, умови $a_{11} < 0, a_{12} < 0$ повинні бути виконані.

Нарешті, пункт (г) показує, що умова $a_{21} < 0$ дозволяє регулювати величину нахилу дотичної багатостатності $\mathrm{T}^{s}(O)$ стійкої багатостатності $\mathrm{M}^{s}(O)$ точки O до вісі OX, так що $\mathrm{S} \cap \mathrm{M}^{s}(O) \neq 0$. Це означає інування гомоклінічної орбіти у точці O.

Розглянемо систему (9) при $c = 0, a_{12} = 0, a_{11} = -2, a_{22} = 3$

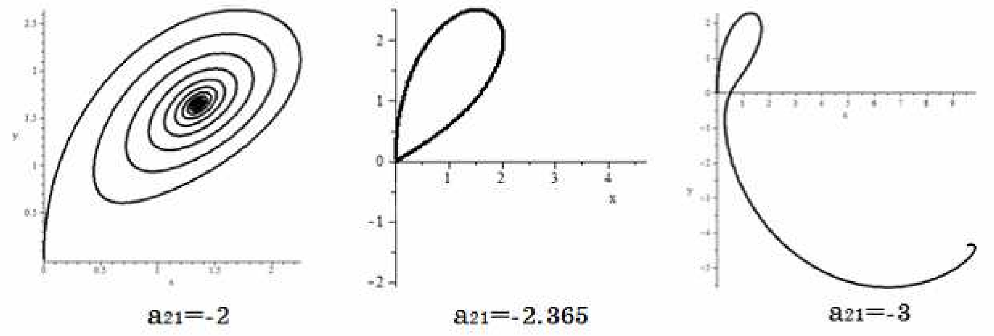

Рисунок 1 - Еволюція траєкторії системи (9) залежно від зміни параметру a_{21}

Висновки

В статті були представлені достатні умови існування гомоклінічних орбіт для широкого класу двовимірних автономних квадратичних динамічних систем. В майбутньому ці умови можуть бути використані для пошуку гомоклінічних орбіт у тривимірних квадратичних системах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zhou T., Ghen G. Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems – 1. Basic framework and methods // International Journal Bifurcation and Chaos, 2006, Vol. 16, 2459-2479.
2. Belozyorov V. Ye. Invariant Approach to an Existence Problem of Nontrivial Asymptotic Stability Cone // Canadien Applied Mathematics Quarterly, 2007, Vol. 15, 125-168.
3. Belozyorov V. Ye. On existence of homoclinic orbits for some types of autonomous quadratic systems differential equations // Applied Mathematics and Computation, 2011, Vol. 217, 4582-4595.
4. Belozyorov V. Ye. General method of construction of implicit discrete maps generating chaos in 3D quadratic systems differential equations //International Journal Bifurcation and Chaos, 2014, Vol. 24, 1450025.
5. Boularas D. A New Classification of Bivariate Homogeneous Quadratic Systems // Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2011, Vol. 2, 93-110.
6. Dickson R. J., Perko L. M.. Bounded Quadratic Systems in the Plane // Journal of Differential Equations, 1970, Vol. 7, 251-273.