УДК 519.2:004.9

Л.О. Кириченко

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Аннотация. В работе проведен сравнительный рекуррентный и энтропийный анализ реализаций хаотических и стохастических процессов, обладающих различной корреляционной структурой. Получены зависимости мер информационной сложности временных рядов от параметров процессов. Исследованы временные ряды, соответствующие различным сложным динамическим системам.

Кслова: временной ряд, мера сложности, энтропия подобия, рекуррентная диаграмма, псевдофазовое пространство, размерность вложения.

Введение и цель

Математическими моделями сложных систем, проявляющих нерегулярную динамику, являются как случайные, так и детерминированные хаотические процессы. Одной из целей анализа временных рядов является извлечение информации из реализации конечной длины и получение вывода о свойствах и механизме процесса, который генерирует ряд.

Существует множество подходов к исследованию временных рядов, базирующихся как на традиционном статистическом анализе, так и на методах нелинейной хаотической динамики. Большинство методов хаотической динамики, основаны на построении псевдофазового пространства по одной реализации процесса с помощью процедуры Паккарда-Такенса [1,2]. Построение пседофазового пространства позволяет вычислять размерность вложения, что является основным инструментом различения хаотических и случайных процессов [1-3]. Такой подход позволяет хорошо различать хаотическую динамику и некоррелированный случайный шум, однако, он плохо работает для реализаций фрактальных случайных процессов, обладающих долгосрочной зависимостью [4-6].

В настоящее время основными характеристиками сложности динамики систем можно считать различные типы энтропии и меры сложности рекуррентных диаграмм [7]. Рекуррентный анализ базируется на фундаментальном свойстве диссипативных динамических систем – рекуррентности (повторяемости состояний). Данный метод анализа, основанный на представлении свойств процессов в виде геометрических структур, является инструментом для обнаружения скрытых зависимостей в наблюдаемых ВР [7-9]. Количественными мерами сложности рекуррентных диаграмм являются меры детерминизма, рекуррентности, ламинарности, тренда и т.д. [9,10]. Характеристикой сложности поведения системы традиционно является энтропия. Существует разные типы энтропии: энтропия подобия, энтропия шаблонов, многомасштабная энтропия, вейвлет-энтропия и др. Расчет энтропии и построение рекуррентных диаграмм основаны на методах нелинейной динамики, в частности, процедуре Паккарда-Такенса, позволяющей восстановить фазовую траекторию системы по одной реализации [4,7-9].

Целью представленной работы является проведение сравнительного рекуррентного и энтропийного анализа детерминированных хаотических и случайных самоподобных реализаций для определения механизма процесса, который генерирует исследуемый ряд.

Методы исследования

Построение псевдофазового пространства [1,2]. Главная идея применения методов нелинейной динамики к анализу траектории динамической системы состоит в том, что основная структура, содержащая в себе всю информацию о системе, а именно, аттрактор системы, может быть восстановлена через измерение только одной компоненты этой системы. Широко используемая процедура Паккарда-Такенса позволяет восстановить фазовую траекторию динамической системы по одной реализации:

$$F(t)=[x(t),x(t+\tau),...,x(t+m\tau)], \tag{1}$$

где: $F(t)$ – m-мерное псевдофазовое пространство, $x(t)$ – временная реализация системы, τ – период запаздывания.

Построение рекуррентной диаграммы [7-10]. Рекуррентная диаграмма является проекцией m- мерного псевдофазового пространства на плоскость. Пусть точка x_i соответствует точке фазовой траектории $x(t)$, описывающей динамическую систему в m-мерном пространстве в момент времени $t=i$, для $i = 1,...,N$, тогда рекуррентная диаграмма RP есть массив точек, где ненулевой элемент с координатами (i, j) соответствует случаю, когда расстояние между x_j и x_i меньше ε:

$$RP_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \| x_i - x_j \|), \quad x_i, x_J \in R^m, \; i, j = 1,...N, \qquad (2)$$

где ε – размер окрестности точки x_i, $\left\| x_i - x_j \right\|$ – расстояние между точками, $\Theta(\cdot)$ – функция Хэвисайда.

Анализ топологии диаграммы позволяет классифицировать наблюдаемые процессы: определять однородные процессы с независимыми случайными значениями; процессы с медленно меняющими параметрами; периодические или осциллирующие процессы, соответствующие нелинейным системам и т.д. Численный анализ рекуррентных диаграмм позволяет вычислять меры сложности структур рекуррентных диаграмм, такие как мера рекуррентности, мера детерминизма, мера энтропии и др. Мера рекуррентности RR показывает плотность рекуррентных точек: $RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j}^{N} RP_{i,j}$. Мера детерминизма Det является характеристикой предсказуемости поведения процесса и равна отношению числа рекуррентных точек, составляющих диагональные линии, к общему количеству рекуррентных точек: $Det = \sum_{l=l_{\min}}^{N} P\ (l) / \sum_{i,j}^{N} RP_{i,j}$, где: l_i – длина i-й диагональной линии, $P\ (l) = \{l_i, i = 1,..., N_l\}$ - частотное распределение длин диагональных линий в диаграмме, N_l - количество диагональных линий.

Вычисление энтропии подобия [4,7,11]. Энтропия подобия $ApEn$ является статистикой регулярности временного ряда, что определяет возможность его предсказания. Рассмотрим временной ряд $\{x_i\}, \; i = 1,..., N$. Пусть вектор $P_m(i)$ – подпоследовательность значений ряда $\{x_i, x_{i+1},..., x_{i+m}\}$ длиной m. Два вектора $P_m(i)$ и $P_m(j)$ будут подобными, если выполняется $\left| x_{i+k} - x_{j+k} \right| < \varepsilon, \; 0 \le k < m$.

Для каждого значения $i = 1,..., N-m+1$ вычисляется величина $C_{im}(\varepsilon) = \frac{n_{i\,m}(\varepsilon)}{N-m+1} f$, где: $n_{i\,m}(\varepsilon)$ - число векторов, подобных вектору $P_m(i)$. Энтропия подобия $ApEn$ определяется по формуле

$$ApEn(m,\varepsilon) = \ln\frac{C_m(\varepsilon)}{C_{m+1}(\varepsilon)}, \quad C_m(\varepsilon) = \frac{1}{N-m+1}\sum_{i=1}^{N-m+1} C_{i\,m}(\varepsilon) \qquad (3)$$

Модельные данные

Хаотические реализации [1,2]. Хаос представляет собой сложную форму поведения детерминированной системы в установившемся режиме. Основным свойством таких систем является чувствительная зависимость режима функционирования к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Если d_0 – мера начального расстояния между двумя точками, то спустя малое время t расстояние между траекториями, выходящими из этих точек, становится равным $d(t) = d_0 e^{\lambda t}$, где величина λ является показателем Ляпунова. Это обстоятельство ведет к потере детерминированной предсказуемости и хаотическому поведению. Одними из самых простых и наглядных математических моделей, демонстрирующих хаотическое поведение, являются итерируемые отображения вида $x_{n+1} = f(C, x_n)$, где C – управляющий параметр.

Для широкого класса нелинейных функций f последовательность значений $\{x_\mathrm{n}\}_{\mathrm{n}=0}^{\infty}$ является хаотической. Наиболее известным примером хаотических отображений является логистическое отображение. Это одномерное квадратичное отображение, определяемое следующим образом:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n), \qquad (4)$$

где A – управляющий параметр, $A \in (0,4]$, а значения $x_n \in [0,1]$.

Реализации процесса авторегрессии [3]. В качестве случайных процессов с краткосрочной зависимостью в работе выбраны процессы авторегрессии 1-го порядка:

$$X(t) = \phi X(t-1) + \varepsilon(t), \qquad (5)$$

где $\varepsilon(t)$ – некоррелированный белый шум, ϕ – коэффициент авторегрессии, $|\phi| < 1$. Значение коэффициента авторегрессии ϕ определяет степень автокорреляционной зависимости процесса.

Стохастические самоподобные реализации [3,12]. Стохастический процесс $X(t)$ является самоподобным с параметром самоподобия H, если процесс $a^{-H} X(at)$ описывается теми же конечномерными законами распределений, что и $X(t)$. Одной из наиболее известных и

 ISSN 1562-9945

простых моделей стохастической динамики, обладающих фрактальными свойствами, является фрактальное броуновское движение (ФБД).

ФБД с параметром $H = 0.5$ совпадает с классическим броуновским движением. Параметр H, называемый показателем Херста, представляет собой степень самоподобия процесса. Наряду с этим свойством, показатель H характеризует меру долгосрочной зависимости стохастического процесса, т.е. убывание корреляционной функции процесса по степенному закону.

Результаты исследования

Проведенный в работе рекуррентный анализ выявил сильные различия, как в визуальной топологии, так и в численных характеристиках реализаций вышеописанных процессов. Рассмотрим пример абсолютно различных по сложности процессов: периодического движения и некоррелированного белого шума. Очевидно, что характеристики вышеописанных хаотических и случайных процессов должны находиться внутри диапазона значений характеристик, рассчитанных для периодических и полностью случайных траекторий. В таблице 1 приведены значения меры рекуррентности RR, меры детерминизма Det и энтропии подобия $ApEn$, рассчитанные для реализаций длиной 1000 значений.

Таблица 1

Числовые характеристики сложности синусоиды и шума

	RR	Det	$ApEn$
Синусоида	0.18	0.998	0.03
Некоррелированный шум	0.0003	0.025	1.7

В таблице 2 приведены средние значения мер рекуррентности, детерминизма и энтропии подобия для реализаций отображения (4) при значениях управляющего параметра A=3.7, 3.9, 4 (соответсвующие значения показателя Ляпунова равны λ=0.37, 0.5, 0.69); для реализаций авторегрессии (5) при значениях коэффициента ϕ=0.3, 0.6, 0.9; для реализаций ФБД при значениях параметра Херста H=0.3, 0.6, 0.9. Большее значение показателя Ляпунова соответствует большей хаотичности системы. В каждом случае величины RR и Det, как меры регулярности, уменьшаются, а величина энтропии увеличивается с ростом хаотичности или некоррелированности процесса.

Таблица 2

Числовые характеристики сложности реализаций

Логистическое отображение				Процесс авторегрессии				Фрактальное броуновское движение			
A	RR	Det	$ApEn$	ϕ	RR	Det	$ApEn$	H	RR	Det	$ApEn$
3.7	0.008	0.1	0.93	0.3	0.0003	0.03	1.72	0.3	0.02	0.55	0.47
3.9	0.004	0.07	1.2	0.6	0.0005	0.05	1.65	0.6	0.02	0.87	0.21
4	0.002	0.05	0.86	0.9	0.002	0.13	1.25	0.9	0.01	0.95	0.12

В работе рассмотрены временные ряды, соответствующие различным сложным динамическим системам. В частности, проведен анализ рядов, построенных по RR-интервалам. RR-интервал представляет собой промежуток времени между соседними зубцами электрокардиограммы и равен продолжительности сердечного цикла. В качестве примера финансового временного ряда рассмотрена динамика изменения индекса S&P500 за 2004-2008 гг. Количественные рекуррентные и энтропийные характеристики, полученные по данным ременным рядам, представлены в табл.3.

Таблица 3

Числовые характеристики сложности рядов

	RR	Det	$ApEn$
RR-интервалы	0.18	0. 84	1,87
S&P 500	0.06	0.91	2.1

На основании результатов анализа можно предложить для моделирования реализаций RR-интервалов детерминированные хаотические системы, тогда как математическое моделирование ряда S&P 500 должно базироваться на самоподобных стохастических процессах. Для адекватного выбора модели в первом случае необходим расчет таких характеристик, как показатель Ляпунова, инвариантная мера распределения и др., а во втором – расчет фрактальных характеристик.

 ISSN 1562-9945

Выводы

В работе проведен сравнительный рекуррентный и энтропийный анализ реализаций хаотических и стохастических процессов, обладающих различной корреляционной структурой: некоррелированных шумов, процессов авторегрессии с краткосрочной зависимостью и фрактальных процессов с долгосрочной памятью. Получены зависимости мер информационной сложности временных рядов, таких как мера рекуррентности, мера детерминизма, энтропия подобия от параметров процессов: бифуркационного параметра, показателя Херста, коэффициента авторегрессии. В работе рассмотрены временные ряды RR-интервалов и индекса S&P500, На основании результатов анализа предложены математические модели, учитывающие корреляционную и рекуррентную структуру временного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М.: Мир, 1990. –304 с..
2. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение / Г. Шустер. – М.: Мир, 1988. –240 с
3. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики / А. Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1998. – Т. 1: Факты. Модели. – 512 с.
4. Pincus S.M. „Approximate entropy as a measure of system complexity” / S.M. Pincus. Proc. // Natl. Acad. Sci. Vol.88, pp. 2297-2301
5. Dabi-Prashad O. Investigation of Time Series of Original Values of Currency Rates Measured on Small Time Frames on FOREX Using Methods of Chaos Theory / O. Dabi-Prashad, L. Kirichenko // Radioelectronics & Informatics. – 2009. – №4. – P. 18–24.
6. Кириченко Л.О., Кобицкая Ю.А., Хабачева А.Ю. Сравнительный рекуррентный анализ хаотических и случайных процессов / Л.О. Кириченко, Ю.А. Кобицкая, А.Ю. Хабачева //Physical and technological problems of radio engineering devices, telecommunication, nano- and microelectronics Proceeding of the III International Scientific-Practical Conference October 24–26, 2013 Chernivtsi, Ukraine.
7. Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловйов В.М., Шарапов О.Д. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем / В.Д. Дербенцев, О.А. Сердюк, В.М. Соловйов, О.Д. Шарапов // Монографія. – Черкаси: Брама-Україна, 2010. – 287 с.
8. Eckmann J.P. Recurrence Plots of Dynamical Systems / J.P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle // Europhysics Letters 5. – 1987. – P. 973-977.
9. Marwan N. Recurrence-plots-based measures of complexity and application to heart-rate-variability data / N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, J.Kurths // Physical Review, E66,– 2002.
10. Zbilut J.P., Zaldivar-Comenges J.-M., Stozzi F. Recurrence quantification based Liapunov exponent for monitoring divergence in experimental data // Phys. Lett. A, V. 297, 2002. – pp. 173-181.
11. Joshua S., Richman J., Moorman R. Physiological time–series analysis using approximate entropy and sample entropy // Am. J Physiol. Heart Circ. Physiol. 278: H2039-H2049, 2000
12. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.