УДК 519.714.72

Ю.М. Рыбка

МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРОСТЫХ ИМПЛИКАНТ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В данной работе предложен алгоритм, позволяющий с помощью операций над вектором истинности булевой функции и ее матрицей склеиваемых наборов, получить простые импликанты или имплиценты данной функции.

Ключевые слова: алгоритм, булева функция, минимизация, операция склеивания, импликанта, имплицента, вектор истинности, матрица склеиваемых наборов.

Постановка проблемы. Определенная часть методов минимизации булевых функций (БФ), базируется на нахождении их простых импликант (имплицент), далее ПИ, по следующим законам булевой алгебры склеивания конституент единицы (нуля)

$$xA \vee \bar{x}A = A,\ (x \vee B) \wedge (\bar{x} \vee B) = B,$$

где A и B – произвольные конъюнкция и дизъюнкция, соответственно [1].

Затем соответствующая минимальная форма находится с помощью известной задачи о нахождения минимального покрытия [1]. Однако, при нахождении ПИ не учитывается, или учитывается только частично, тот факт, что не все они могут склеиваться.

В данной работе рассматривается матричный алгоритм определения ПИ БФ с учетом фактора их потенциально возможного склеивания. Все дальнейшие рассуждения относятся к дизъюнктивным нормальным формам (ДНФ) и могут быть легко распространены на конъюнктивные нормальные формы (КНФ)

Анализ последних исследований, нерешенные проблемы. Существуют методы полного перебора всех объектов склеивания, например, метод Квайна [1]. В методе Мак-Класки [1] наборы БФ ранжируются в соответствии с числом единиц в них, что не определяет все потенциально склеиваемые наборы. В работе [2] предложена методика нахождения всех наборов, которые могут склеиваться.

Постановка задачи.В данной работе будет предложен алгоритм, позволяющий на основании результатов работы [2],базирующийся на операциях с вектором истинности полностью определенной БФ и матрицей склеиваемыхнаборов, получить все ПИ БФ.

Основные результаты. Так же, как в работе [2], поставим в соответствие булевой функции n переменных двоичную матрицу склеиваемых наборов S, в которой s_{ij}=1, если i-й набор склеивается с j-м набором и s_{ij}=0,в противном случае, (i,j=0, …,2^{n-1}).

Приведем матрицы S для БФ 1, 2, и 3 переменных.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Обозначив первую матрицу (для БФ одной переменной) через $S^{(1)}$, можно легко видеть, что матрицы $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$ для БФ двух и трех переменных, соответственно, могут быть образованы следующим образом:

$$S^{(2)} = \begin{bmatrix} S^{(1)} & I^{(1)} \\ I^{(1)} & S^{(1)} \end{bmatrix} \quad S^{(3)} = \begin{bmatrix} S^{(2)} & I^{(2)} \\ I^{(2)} & S^{(2)} \end{bmatrix},$$

где $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$– единичные матрицы соответствующих размерностей.

Следовательно, в общем случае, для БФ n переменных, имеем следующее:

$$S^{(n)} = \begin{bmatrix} S^{(n-1)} & I^{(n-1)} \\ I^{(n-1)} & S^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Следуя [2], для БФ n переменных введем также в рассмотрение двоичный вектор истинности $F^{(n)}$, i-я компонента которого равна ее значению (0 или 1) на i-м наборе (i=0, …,2^{n-1}).

Выполним операцию покомпонентного умножения данного вектора на матрицу $S^{(n)}$. В результате получим матрицу $P^{(n)}$ размерности n x n. Легко видеть, что j-й элемент i-й строки матрицы $P^{(n)}$, если он равен единице, указывает на j-е наборы БФ, с которыми склеивается данный i-й набор (i, j = 0, …,2^{n-1}). При этом, если i-я компонента вектора $F^{(n)}$ равна нулю, необходимо обнулить и i-ю строку матрицы $P^{(n)}$.Напомним, что приведенные рассуждения применимы к ДНФ. При работе с КНФ вектор истинности $F^{(n)}$ необходимо проинвертировать.

Далее опишем процедуру нахождения ПИ.

Вместе с i-м номером каждой строки (в двоичном представлении) матрицы $P^{(n)}$ анализируются все остальные наборы этой строки, равные единице (также представленные в двоичной системе счисления). При этом, для двух таких рассматриваемых наборов $X=\{x_0, \ldots, x_k\}$ и $Y=\{y_0, \ldots, y_k\}$, результатом является набор $Z=\{z_0, \ldots, z_k\}$, где $z_i=x_{i,}$, если $x_i=y_{i,}$, иначе $z_i=2$. Элементы вектора Z, равные 1, обозначают переменные, входящие в импликанты (имплиценты) в прямом (инверсном) виде, нулевые элементы – переменные, входящие в инверсном (прямом) виде, элементы, равные 2, – переменные, которые склеились и в импликанты (имплиценты) не входят.

Все дальнейшие склеивания производятся над импликантами (имплицентами), которые имеют одинаковые элементы, равные 2, по следующим правилам: $z_i=x_i$, если $x_i=y_i$, $z_i=2$, если x_i□y_i, для случая, когда x_iи y_iравны нулю либо единице и $z_i=x_i$, если $x_i=y_i=2$. В результате выполнения всех возможных склеиваний получим все ПИ БФ.

Пример. Пусть имеется следующий вектор истинности БФ трех переменных: $F^{(3)}=[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1]$.

В результате умножения данного вектора на матрицу $S^{(3)}$ получим следующую матрицу $P^{(3)}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

По результатам склеивания имеем:

X	0 1 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
Y	1 1 0	1 1 1	0 1 0 1 1 1	1 01 1 1 1
Z	2 1 0	1 2 1	2 1 0 1 1 2	1 2 1 1 1 2

Таким образом, в результате применения предложенного алгоритма, получены следующие ПИ: 2 1 0, 1 2 1, 1 1 2, или, в символьной нотации, $-x_2\overline{x_3}$, x_1x_3, x_1x_2.

С целью подтверждения справедливости полученных результатов, рассмотрим карту Карно [1] данной функции (рис. 1),из которой видно, что полученные ранее ПИ – такие же.

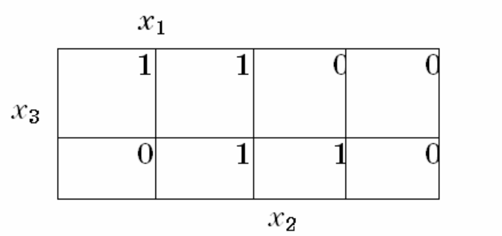

Рисунок 1 – Карта Карно

Выводы. В данной работе предложен матричный алгоритм нахождения простых импликант или имплицент полностью определенных булевых функций, основанный на обработке только потенциально склеиваемых наборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики /Ю.Л. Васильев, Ф.Я. Ветухновский, В.В. Глаголев и др.; Под общ.ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова.– М.: Наука, 1974. – Т. 1.– 312 С.
2. Рыбка Ю. М.Оптимизация при минимизации булевых функций // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 6 (35) – Днепропетровск, 2004. –С 18-23.