

И.И. Коваленко, С.Б. Приходько, Е.С. Пугаченко, А.В. Швед  
**ГРАФОДИНАМИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ  
 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ  
 СОСТАВОМ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

*Аннотация. Рассматривается новый подход имитационного моделирования задач управления составом организационных систем с использованием теории графодинамики.*

*Ключевые слова: организационные системы, иерархия, графодинамика, имитационное моделирование.*

### Введение

К числу важнейших задач управления организационными системами (ОС) относятся задачи управления их составом (набор персонала, увольнение и др.). Эти задачи сводятся, как правило, к поиску и формированию оптимальных иерархий управления в соответствии с определенными критериями (например, затраты на содержание сотрудников организации, норма управляемости и др.) [1].

Приведем постановки известных задач управления составом ОС, для чего введем следующие обозначения [1,2]:

$N_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  – фактический (начальный) состав ОС, состоящий из  $n$  участников;  $N$  – конечный состав ОС (результат решения задачи управления составом);  $N'$  – множество потенциальных (фактических и претендентов) участников ОС ( $N \subseteq N'$ ,  $N_0 \subseteq N'$ );  $\Delta^+(N, N_0) = N|N_0$  – множество участников, принятых на работу (включенных в состав ОС);  $\Delta^-(N, N_0) = N_0|N$  – множество участников, уволенных с работы (исключенных из состава ОС);  $\Phi(N, N_0)$  – функционал, ставящий в соответствие начальному и конечному составу действительное число – эффективность управления составом.

С учетом этого, могут решаться следующие задачи управления составом ОС:

- задача формирования состава, которая характеризуется отсутствием начального состава ( $N_0 = \emptyset$ ):

$$\Phi(N, \emptyset) \rightarrow \max_{N \in 2^{N'}} \quad (1)$$

- задача оптимизации состава (при фиксированном составе  $N$ ):

$$\Phi(N, N_0) \rightarrow \max_{N \in 2^{N'}} \quad (2)$$

- задача расширения состава (иногда ее называют задачей о приеме на работу):

$$\Phi(N, N_0) \rightarrow \max_{N \in 2^{N'} : N_0 \subseteq N; |N| \leq n+m} \quad (3)$$

где  $m$  – ограничение на максимальное число вновь принимаемых на работу участников;

- задача сокращения состава (задача об увольнении):

$$\Phi(N, N_0) \rightarrow \max_{N=N_0 \mid |\Delta^-|; |\Delta^-| \geq m} \quad (4)$$

и ряд других задач.

Общим недостатком рассмотренных моделей является то, что в основе их реализации лежит метод перебора множества допустимых иерархий, который характеризуется высокой вычислительной сложностью. Данная проблема в значительной степени может быть снята посредством использования графодинамических систем для моделирования рассмотренных задач.

#### Постановка задачи.

Цель работы состоит в рассмотрении нового подхода, в основе которого лежит имитационное моделирование задач управления составом ОС с использованием теории графодинамических систем.

#### Изложение основного материала.

В работах [3,4] определено понятие «графодинамическая система» и предложен один из возможных способов ее описания – язык «П-функций».

Под графодинамической системой понимается динамическая система, в которой объектом изменения является ее структура, описываемая графом связи между отдельными элементами. Ограничимся рассмотрением лишь таких систем, в которых граф связи является деревом.

Пусть имеется иерархический нумерованный граф-дерево (рис. 1, а), где номер  $n$  каждой вершины строго больше номера «старшей»

вершины с номером  $m$ . Поставим в соответствие каждой вершине с номером  $n$  число  $\varphi(n)=m$ . Например, для графа на рис. 1, а получим следующую последовательность [2]:

$$\varphi(1) = 0; \varphi(2) = \varphi(3) = \varphi(4) = 1; \varphi(5) = 2; \varphi(6) = \varphi(7) = \varphi(8) = \varphi(9) = 3; \varphi(10) = 4; \dots$$

Тогда такой граф может быть представлен целочисленной функцией  $\varphi(n)$ , определенной на множестве всех неотрицательных чисел  $1, 2, 3, \dots, N_{\max}$ , где  $N_{\max}$  – максимальный номер вершине в графе. Функция  $\varphi(n)$ , отражающая как бы структуру подчинений в графе, названа функцией подчинения, или, кратко, П-функцией. Графики всех возможных П-функций с учетом ограничений на нумерацию вершин лежат внутри плоскости  $\{n, \varphi(n)\}$ . На рис. 1, б показана П-функция графа (рис. 1, а).

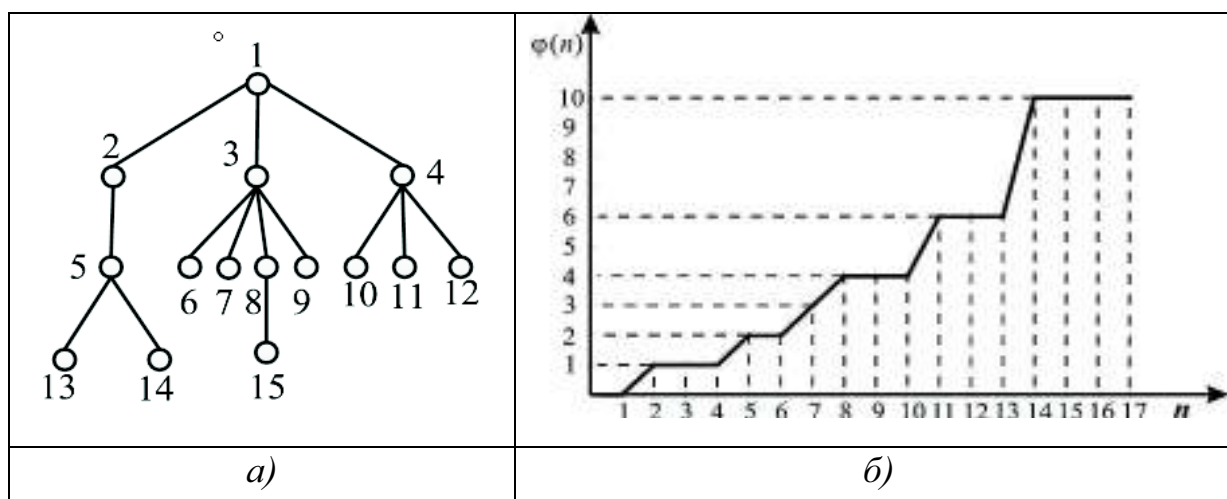


Рисунок 1 – Граф-дерево и его П-функция

Целочисленная П-функция  $\varphi(n)$  заведомо удовлетворяет следующим ограничениям:

1.  $\varphi(n) < n$ , т.е. номер любой вершины всегда больше номера той вершины, которой она «подчинена».
2.  $\varphi(n)$  определена на всех целых  $n$  от 1 до некоторого  $N$ .
3.  $\varphi(n)=0$  – означает, что вершина графа с номером  $n$  не подчинена ни одной вершине, т.е. данное ограничение характеризует процедуру появления корня (корневой вершины) дерева.

Над П-функциями выполняются унарные, бинарные и  $r$ -арные операции, перечень которых приведен в таблице 1.

## Операции преобразования графов

N/N п. п.	Название и математическое представление операции	Результат выполнения операции
1	2	3
Унарные операции		
1	Операция «разукрупнение» $\psi(n) = \left[ \frac{(n)}{k} \right]$ , где $[\cdot]$ – целая часть, $k > 1$	Декомпозиция дерева (деление на несколько частей с сохране- нием общего числа вершин)
2	Операция «укрупнение» $\psi(n) = k \cdot \varphi(n)$ , $k=2,3,\dots$	«Растягивание» дерева по вер- тикальной оси
3	Операция «параболический рост» $\psi(n) = [\sqrt{\varphi(n)}]$ , $n=1,2,\dots,N$	Сжатие числа уровней с увели- чением числа вершин сверху вниз
4	Операция «укрупнение с со- кращением» $\psi(n) = \varphi(k \cdot n)$ , $k=2,3,\dots$	Уменьшение числа вершин де- рева с одновременным его «рас- тягиванием»
5	Операция «предпочтение» $\psi_1(n) = \varphi(n+1)$ , $\psi_2(n) = \varphi(n) \div 1$ , где операция $\div$ означает $a \div b = \begin{cases} a - b, & \text{если } a > b; \\ 0, & \text{если } a \leq b. \end{cases}$	Означает переподчинение каж- дой вершины дерева вершине ближайшего «младшего по ран- гу начальника» или переподчи- нение «начальнику с более вы- соким рангом»
6	Операция «разукрупнение и развитие» $\psi(n) = \varphi([n/k])$ , $k > 1$ . При дополнительном предпо- ложении $\varphi([n/k]) = 1$ при $n/k < 1$	В терминах административной структуры описывает как бы разделение структуры, сопрово- ждающееся ростом штата

1	2	3
7	Аддитивная операция «локального переподчинения» $\psi(n) = \varphi(n) + p(n)$ , $p(n) = \{-1; 0; +1\}$ .	Локальные переподчинения вершин в дереве
8	Мультипликативная операция «деструктуризация» $\psi(n) = [\varphi(n) \cdot p(n)]$ , где $p(n) = 1/n$ .	Превращение дерева (леса) в набор несвязных вершин («рассыпанный», вырожденный граф)
Бинарные операции		
9	Операция «арифметическое усреднение» $\psi(n) = [(\varphi(n) + \pi(n))/2]$ , где $[\cdot]$ – означает целую часть	Синтез и упорядочение структур деревьев
10	Операция «геометрическое усреднение» $\psi(n) = [\sqrt{\varphi(n) \cdot \pi(n)}]$	Синтез структур деревьев с увеличением числа уровней иерархии
11	Операция «экстремизация» $\psi(n) = \max(\varphi(n), \pi(n))$ , $\psi(n) = \min(\varphi(n), \pi(n))$ .	Синтез структуры дерева по двум исходным деревьям
$r$ -арные операции		
12	Арифметическое усреднение по $r$ аргументам $\psi(n) = \left[ \frac{\sum_i^r \varphi_i(n)}{r} \right]$	Синтез и упорядочение структур деревьев по $r$ П-функциям
13	Операция «взвешенное среднее» $\psi(n) = \left[ \frac{k_1 \varphi_1(n) + \dots + k_r \varphi_r(n)}{k_1 + \dots + k_r} \right]$ , где все $k_i$ – положительные числа	Объединение задач синтеза структуры дерева по $r$ П-функциям с задачей «растягивания» дерева по вертикали

Представленные процедуры позволяют производить преобразования иерархических организационных структур при решении различных задач их оптимизации. Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих возможности графодинамики.

### 1. Моделирование перераспределения нормы управляемости в организационной структуре

Рассмотрим ситуацию, когда необходимо промоделировать процедуру увеличения числа подчиненных в иерархии по мере перехода от более высоких к более низким её уровням. Такая задача может рассматриваться, как перераспределение нормы управляемости между менеджерами. Процедура может быть реализована посредством следующей операции:

$$\psi(n) = [\sqrt{\zeta(n)}], \quad \zeta(n) = [n \cdot (\varphi(n) + 1) / 2] \quad (5)$$

На рис. 2 (а, б) представлено соответственно исходное двоичное дерево и преобразованный граф.

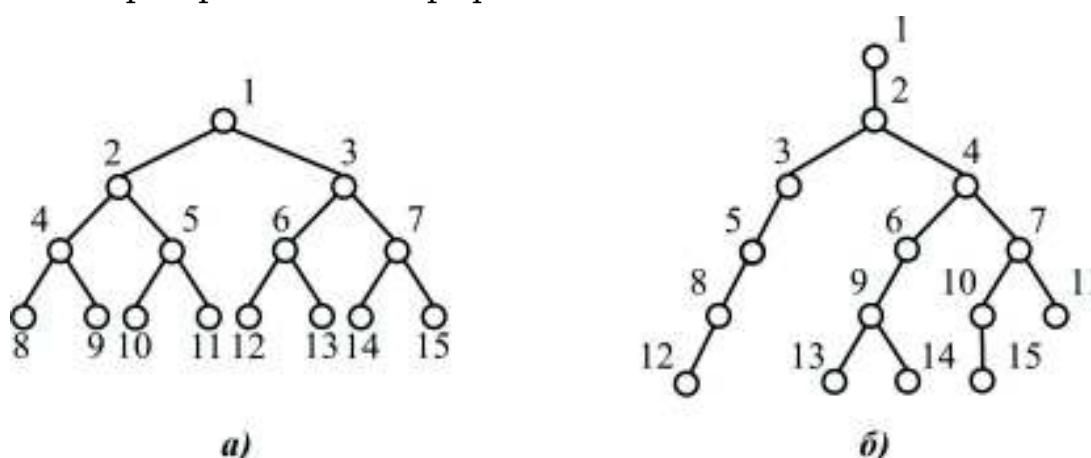


Рисунок 2 – а) исходное двоичное дерево; б) преобразованный граф

Выпишем, сопутствующие такому преобразованию выражения:

$$n=1: \zeta(n) = [1 \cdot (0+1) / 2] = 1/2; \quad \psi(n) = [\sqrt{\zeta(n)}] = [\sqrt{1/2}] = [0,7] = 0;$$

(вершина 1 является корневой);

$$\begin{aligned}
 n = 2: \zeta(n) &= [2 \cdot (1+1)/2] = 2; & \psi(n) &= [\sqrt{2}] = [1,4] = 1 \Rightarrow 2 < 1; \\
 n = 3: \zeta(n) &= [3 \cdot (2+1)/2] = 4,5; & \psi(n) &= [\sqrt{4,5}] = [2,12] = 2 \Rightarrow 3 < 2; \\
 n = 4: \zeta(n) &= [4 \cdot (3+1)/2] = 8; & \psi(n) &= [\sqrt{8}] = [2,88] = 2 \Rightarrow 4 < 2; \\
 n = 5: \zeta(n) &= [5 \cdot (4+1)/2] = 12,5; & \psi(n) &= [\sqrt{12,5}] = [3,53] = 3 \Rightarrow 5 < 3; \\
 n = 6: \zeta(n) &= [6 \cdot (5+1)/2] = 18; & \psi(n) &= [\sqrt{18}] = [4,2] = 4 \Rightarrow 6 < 4; \\
 n = 7: \zeta(n) &= [7 \cdot (6+1)/2] = 24,5; & \psi(n) &= [\sqrt{24,5}] = [4,94] = 4 \Rightarrow 7 < 4; \\
 n = 8: \zeta(n) &= [8 \cdot (7+1)/2] = 32; & \psi(n) &= [\sqrt{32}] = [5,65] = 5 \Rightarrow 8 < 5;
 \end{aligned}$$

.....

$$n = 15: \zeta(n) = [15 \cdot (14+1)/2] = 112,5; \quad \psi(n) = [\sqrt{112,5}] = [10,6] = 10 \Rightarrow 15 < 10.$$

Рассмотрение преобразованного графа показывает, что искомое перераспределение нормы управляемости произошло. Например, если в исходном графе вершине 4 подчинялись вершины 8 и 9, то в преобразованном графе ей подчиняются уже вершины 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15.

## 2. Моделирование задачи укрупнения организационных структур

На рис. 3 (а-в) представлены соответственно три исходные структуры и их функции подчинения (Π-функции  $\varphi_1(n)$ ,  $\varphi_2(n)$ ,  $\varphi_3(n)$ ), из которых необходимо создать одну структуру. Для этого воспользуемся операцией «укрупнение», имеющей вид:  $\psi(n) = k \cdot \varphi(n)$ ,  $k=2,3, \dots$ .

Приведем необходимые преобразования.

$$\begin{aligned}
 n = 1: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(0) = 0 \Rightarrow \text{(1-ая вершина корневая);} \\
 n = 2: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(0) = 0 \Rightarrow \text{(2-ая вершина корневая);} \\
 n = 3: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(0) = 0 \Rightarrow \text{(3-ая вершина корневая);} \\
 n = 4: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(1) = 2 \Rightarrow 4 < 2; \\
 n = 5: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(1) = 2 \Rightarrow 5 < 2; \\
 n = 6: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(1) = 2 \Rightarrow 6 < 2; \\
 n = 7: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(2) = 4 \Rightarrow 7 < 4; \\
 n = 8: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(2) = 4 \Rightarrow 8 < 4; \\
 n = 9: \psi(n) &= 2 \cdot \varphi(3) = 6 \Rightarrow 9 < 6;
 \end{aligned}$$

$$n = 10 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(3) = 6 \Rightarrow 10 < 6;$$

$$n = 11 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(3) = 6 \Rightarrow 11 < 6;$$

$$n = 12 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(5) = 10 \Rightarrow 12 < 10;$$

$$n = 13 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(5) = 10 \Rightarrow 13 < 10;$$

$$n = 14 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(5) = 10 \Rightarrow 14 < 10;$$

$$n = 15 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(8) = 16;$$

$$n = 16 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(8) = 16.$$

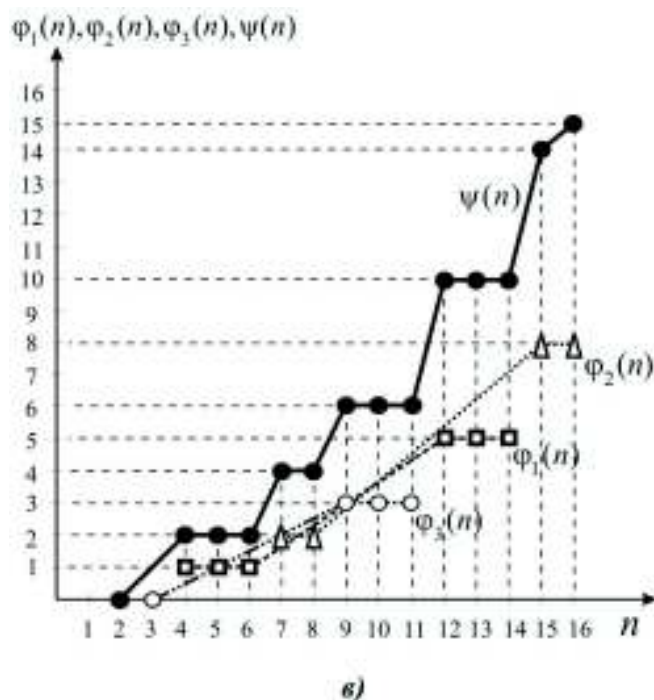
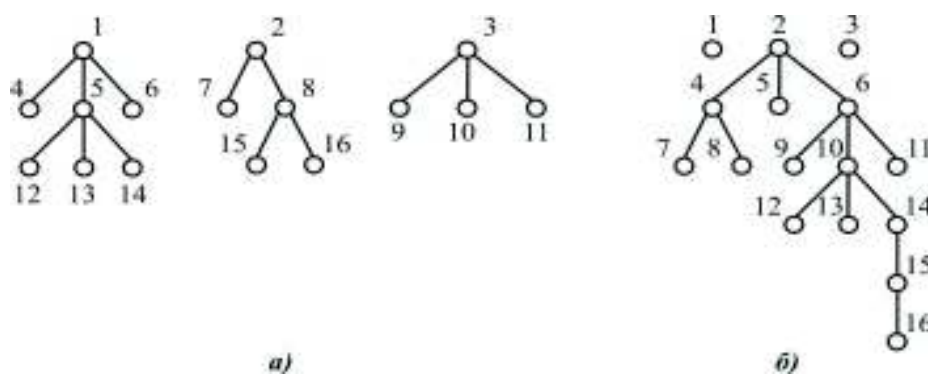


Рисунок 3 – Графическое представление процедуры укрупнения структур:  
 а) исходные структуры; б) укрупненная структура;  
 в) П-функции структур

В двух последних выражениях для  $n=15$  и  $n=16$ , полученные функции  $\psi(n)$  нарушают условия её существования, т.е.  $\psi(n) > n$ . По-



этому, исходя из [1,2] воспользуемся процедурой её доопределения, а именно:  $\psi(n) = (n-1)$ .

Тогда выражения для  $n=15$  и  $n=16$  можно представить в таком виде:

$$n = 15 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(8) = 16 \Rightarrow (n-1 = 15-1 = 14); 15 < 14;$$

$$n = 15 : \psi(n) = 2 \cdot \varphi(8) = 16 \Rightarrow (n-1 = 15-1 = 15); 16 < 15;$$

На рис. 3, б представлен преобразованный граф, определяющий укрупненную структуру организации.

### 3. Моделирование процедуры укрупнения структуры организации с сокращением её состава

Для реализации такой процедуры используем операцию «укрупнение с сокращением», которая представлена следующим выражением:  $\psi(n) = \varphi(k \cdot n)$ ,  $k=2,3,\dots$ . Данная операция уменьшает число вершин дерева с одновременным увеличением числа уровней иерархии. На рис. 4 (а, б) представлены пять исходных структур и их функции подчинения.

Выполним преобразования исходных структур для  $k=2$  и  $k=3$ .

Для  $k=2$  имеем:

$$n = 1 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 1) = 0 \Rightarrow (1\text{-ая вершина корневая});$$

$$n = 2 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 2) = 0 \Rightarrow (2\text{-ая вершина корневая});$$

$$n = 3 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 3) = 1 \Rightarrow 3 < 1;$$

$$n = 4 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 4) = 2 \Rightarrow 4 < 2;$$

$$n = 5 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 5) = 2 \Rightarrow 5 < 2;$$

$$n = 6 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 6) = 3 \Rightarrow 6 < 3;$$

$$n = 7 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 7) = 3 \Rightarrow 7 < 3;$$

$$n = 8 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 8) = 4 \Rightarrow 8 < 4;$$

$$n = 9 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 9) = 4 \Rightarrow 9 < 4;$$

$$n = 10 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 10) = 5 \Rightarrow 10 < 5;$$

$$n = 11 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 11) = 5 \Rightarrow 11 < 5;$$

$$n = 12 : \psi(n) = \varphi(2 \cdot 12) = 5 \Rightarrow 12 < 5;$$

$n=13: \psi(n) = \varphi(2 \cdot 13)$  – не существует.

Аналогично для  $n=14 \div 25$  функция  $\psi(n)$  не существует.

Для  $k=3$  имеем:

$n=1: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 1) = 0 \Rightarrow$  (1-ая вершина корневая);

$n=2: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 2) = 1 \Rightarrow 2 < 1;$

$n=3: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 3) = 2 \Rightarrow 3 < 2;$

$n=4: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 4) = 3 \Rightarrow 4 < 3;$

$n=5: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 5) = 4 \Rightarrow 5 < 4;$

$n=6: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 6) = 4 \Rightarrow 6 < 4;$

$n=7: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 7) = 5 \Rightarrow 7 < 5;$

$n=8: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 8) = 5 \Rightarrow 8 < 5;$

$n=9: \psi(n) = \varphi(3 \cdot 9)$  – не существует.

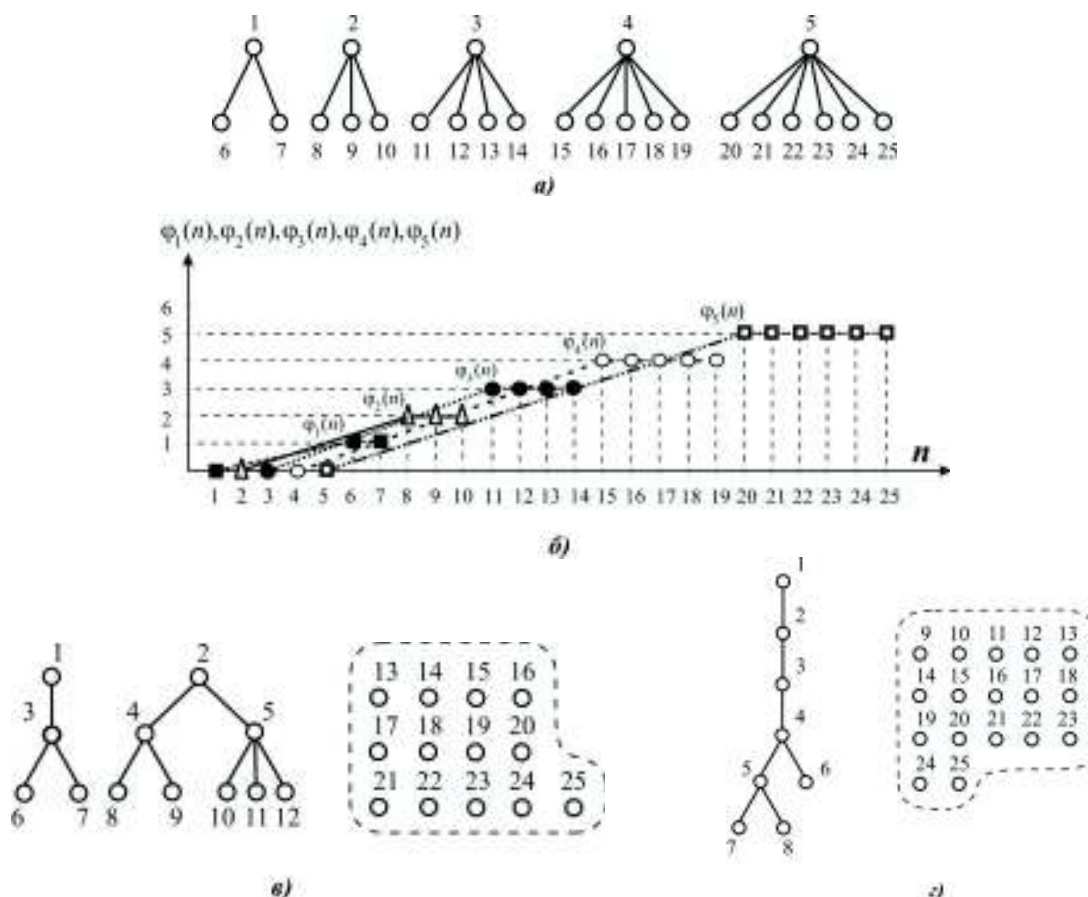


Рисунок 4 – Графическое представление процедуры укрупнения структур:

а) исходные графы; б) П-функции структур;

в) укрупненная структура с сокращением состава для  $k=2$ ;

г) укрупненная структура с сокращением состава для  $k=3$

Для вершин  $n=10\div 25$  функция  $\psi(n)$  также не существует.

Результирующие графы представлены на рис. 4 (в, г). Первый из них иллюстрирует появление двух деревьев (вместо пяти), а также наличие несвязных («рассыпанных») вершин  $13\div 25$ . Во втором случае ( $k=3$ ) получена одна структура, причем число несвязных вершин увеличилось ( $9\div 25$ ). Появление указанных вершин может быть интерпретировано, как сокращение состава организации.

#### Выводы.

Рассмотрен подход, направленный на создание технологий имитационного моделирования задач управления иерархическими организационными системами с применением методов графодинамики, в основе которых лежат целенаправленные операции над графами. Математический аппарат данной теории при формализации каких-либо общих принципов или «законов жизни» иерархической структуры (содержательной трактовкой) позволяет описывать различные изменения таких структур. Выигрыш при этом видится, прежде всего, в снижении вычислительных затрат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н. Введение в теорию управления организационными системами / В.Н. Бурков, Н.А. Коргин, Д.А. Новиков. – М.: «ЛИБРОКОМ», 2009. – 264 с.
2. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
3. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики) – I / А. Айзерман, Л. А. Гусев, С. В. Петров, Смирнов И.Н. // Автоматика и телемеханика. - М.: «Наука». - 1977. - № 7. - С.135-151.
4. Динамический подход к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики) – II / А. Айзерман, Л. А. Гусев, С. В. Петров, Смирнов И.Н. // Автоматика и телемеханика. - М.: «Наука». - 1977. - № 9. - С.123-136.
5. Графодинамическое моделирование структур организационных систем / И.И. Коваленко, М.В. Донченко, А.В. Швед [и др.]. – Николаев: Илион, 2012. – 64с. – (Препринт / Илион, 2012).
6. Тененбаум Л.А. Исследование одного класса графодинамических систем / Л.А. Тененбаум // Автоматика и телемеханика. – 1977. - №10. – С.153 – 173.