УДК 004.931

В.Л. Шергин

ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ПУТЁМ ПРИМЕНЕНИЯ SLICE-ОПЕРАТОРА В НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКЕ

Аннотация. Предложен алгоритм вычисления быстрого преобразования Радона, основанный на использовании slice-оператора в L_p-метрике. Замена метрики при преобразовании координат в slice-операторе позволяет уменьшить размер обрабатываемой матрицы, и за счёт этого увеличить быстродействие алгоритма. Проведено сравнение быстродействия алгоритма преобразования Радона с использованием slice-оператора в евклидовой метрике и в метрике L_p.

Ключевые слова: преобразование Радона, slice-оператор, временнбя сложность, L_p-метрика, обнаружение прямых линий.

Введение

Одним из наиболее распространённых методов поиска прямых на изображениях является метод преобразования Радона [1]. Преобразование Радона отображает исходное изображение, заданное двумерной функцией $f(x, y)$ декартовых координат $\vec{\xi} = (x, y)^T$ в пространство параметров прямой (ρ, φ). Выделив локальные максимумы в полученном отображении $g(\rho, \varphi)$, локализуют прямые, содержащиеся в исходном изображении. Можно отметить, что в случае поиска прямых, преобразование Радона эквивалентно преобразованию Хафа [2].

Основным недостатком прямого преобразования Радона (как и преобразования Хафа) является низкое быстродействие. По этой причине преобразование Радона $\hat{R}^{(2)}(f)$ обычно вычисляют, основываясь на теореме о центральном сечении [2]:

$$\hat{R}^{(2)}(f) = \left(\hat{F}^{(1)}\right)^{-1} \hat{P}^{(2)} \hat{F}^{(2)}(f), \qquad (1)$$

где $\hat{F}^{(1)}, \hat{F}^{(2)}$ – операторы интегральных преобразований (типа Фурье), $\hat{P}^{(2)}$ – оператор «вырезания» центрального слоя (slice-оператор).

При этом основное внимание уделяется выбору вида преобразований и их реализации [2-3]. Например, в работе [3] предлагается заменить преобразование Фурье преобразованием Хартли. Оно имеет ядро $H^{(n)}(x, k_x) = \mathrm{cas}(2\pi x k_x)$, где $\mathrm{cas}(t) = \cos(t) + \sin(t)$, следовательно, оперирует с действительными числами. За счёт этого емкостная сложность алгоритма снижается вдвое, а также повышается его быстродействие.

Вместе с тем, можно показать, что значительное влияние на быстродействие алгоритмов преобразования Радона оказывает выбор slice-оператора. Причём этот выбор не зависит от выбора интегрального преобразования. Анализ slice-оператора составляет предмет исследования данной работы.

При этом ставится цель – подобрать такой вид этого оператора, которой обеспечивал бы повышение быстродействия преобразования Радона при сохранении разрешающей способности.

Преобразование Радона.

Нормированное уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$\rho = x\cos\varphi + y\sin\varphi = \vec{\xi}^T\vec{n}, \qquad (2)$$

где $\vec{\xi} = (x, y)^T$, $\quad \vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$.

Его параметры имеют простой геометрический смысл: φ – это угол между нормалью $\vec{n}$ и осью абсцисс, а ρ – расстояние от прямой до начала координат.

Преобразованием Радона [2] называется интеграл от функции $f(x, y)$ вдоль прямой (2):

$$R(\rho, \varphi) = \iint f(x, y)\delta(\rho - x\cos\varphi - y\sin\varphi)dxdy, \quad \int\delta(x)dx = 1 \qquad (3)$$

Будем обозначать через $\hat{X}^{(n)}(f)(\vec{\eta}) = \left\langle f, X^{(n)} \right\rangle(\vec{\eta})$ линейные операторы, действующие на функцию $f(\vec{\xi})$. Верхний индекс указывает размерность оператора, $\vec{\eta}$ представляет собой координатное пространство отображения, $X^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ – ядро оператора, угловые скобки обозначают скалярное произведение в гильбертовом пространстве:

$$\left\langle f, X^{(n)} \right\rangle \equiv \int\limits_{R^n} f(\vec{\xi}) X^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) d^n \vec{\xi}, \quad \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

В операторной форме преобразование Радона (3) будет иметь вид:

$$\widehat{R}^{(2)}(f)(\rho, \varphi) = \left\langle f, R^{(2)} \right\rangle (\rho, \varphi), \quad R^{(2)}(\vec{\xi}, \rho, \varphi) = \delta(\rho - \vec{\xi}^T \vec{n}(\varphi)). \tag{5}$$

Обычно вычисление преобразования Радона основано на теореме о центральном сечении (projection-slice theorem), устанавливающей связь преобразования Радона с преобразованием Фурье [2,3]:

$$\hat{F}^{(1)} \left(\hat{R}^{(2)}(f)(\rho, \varphi) \right)(r) = \hat{P}^{(2)} \left(\hat{F}^{(2)}(f)(\omega_x, \omega_y) \right)(r, \varphi), \tag{6}$$

или в операторной форме

$$\widehat{F}^{(1)} \widehat{R}^{(2)}(f) = \widehat{P}^{(2)} \widehat{F}^{(2)}(f). \tag{7}$$

где $\widehat{P}^{(2)}(f)(r, \varphi)$ и $\widehat{F}^{(n)}(f)(\vec{\eta})$ – операторы перехода к полярным координатам и n-мерного преобразования Фурье соответственно. Их ядра имеют вид

$$P^{(2)}(\vec{\omega}, r, \varphi) = \delta(\vec{\omega} - r\vec{n}(\varphi)), \quad F^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \exp(-2\pi i \; \vec{\eta}^T \vec{\xi}). \tag{8}$$

Доказательство (6)-(7) несложно. В самом деле: ядро оператора, стоящего в левой части (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ker\left(\widehat{F}^{(1)} \widehat{R}^{(2)} \right) = \left\langle F^{(1)}(\rho, r), R^{(2)}(\rho, \vec{\xi}, \vec{n}) \right\rangle (r, \vec{\xi}, \vec{n}) = \\ &= \left\langle \exp(-2\pi i \; r\rho), \delta(\rho - \vec{\xi}^T \vec{n}) \right\rangle (r, \vec{\xi}, \vec{n}) = \exp(-2\pi i \; r\vec{\xi}^T \vec{n}). \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогичным образом найдём ядро оператора правой части (7):

$$\begin{aligned} &\ker\left(\widehat{P}^{(2)} \widehat{F}^{(2)} \right) = \left\langle P^{(2)}(\vec{\omega}, r, \vec{n}), F^{(2)}(\vec{\omega}, \vec{\xi}) \right\rangle (\vec{\xi}, r, \vec{n}) = \\ &= \left\langle \delta(\vec{\omega} - r\vec{n}), \exp(-2\pi i \vec{\xi}^T \vec{\omega}) \right\rangle (\vec{\xi}, r, \vec{n}) = \exp(-2\pi i \; r\vec{\xi}^T \vec{n}). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (9)-(10) непосредственно следует выражение (1) являющееся математическим описанием алгоритма вычисления преобразования Радона через преобразования Фурье.

Оценка быстродействия алгоритма преобразования Радона

<u>Численный алгоритм преобразования Радона:</u>

1. К матрице исходных данных X_{ij} (размерности $N \times N$) применяют двумерное преобразование Фурье;

 ISSN 1562-9945

2. В пространстве Фурье-образов выполняют переход к полярным координатам, т.е. из комплекснозначной $N \times N$ матрицы W_{ij} получают матрицу $P_{l,m}$ размерности $L \times M$ (где строки соответствуют координате φ, а столбцы – r). Формулы пересчёта координат имеют вид:

$$\varphi = -\pi + l \cdot \Delta\varphi, \quad r = m \cdot \Delta r, \quad j = \left\lfloor \tfrac{N}{2} + r\cos\varphi \right\rfloor, \quad y = \left\lfloor \tfrac{N}{2} - r\sin\varphi \right\rfloor, \\ l = 0,\ldots,L-1, \quad m = 0,\ldots,M-1; \tag{11}$$

3. К строкам матрицы $P_{l,m}$ применяют одномерное обратное преобразование Фурье, получая в итоге матрицу преобразования Радона размерности $L \times M$ в координатах (ρ, φ).

Преимуществом алгоритма, основанного на (1), по сравнению с прямым вычислением (3) является более высокое быстродействие. Оно описывается формулой

$$T(N, M, L) = T_1(N) + T_2(L, M, N) + T_3(L, M), \tag{12}$$

где $T_1(N), T_2(L, M, N), T_3(L, M)$ – сложность реализации операторов $\hat{F}^{(2)}, \hat{P}^{(2)}, \left(\hat{F}^{(1)}\right)^{-1}$ соответственно.

Для T_2 имеет место оценка: $T_2(L, M, N) \sim \max(M, N) \bullet \max(L, N)$. При этом $T_2 << \min(T_1, T_3)$. Значения N и M обычно выбирают равными степеням двойки и используют быстрые алгоритмы преобразования Фурье (БПФ) с быстродействием $t_F(N) = \theta\left(N \log(N)\right)$. В этом случае

$$T_1(N) = 2N \cdot t_F(N) \sim 2N^2 \log(N), \; T_3(L, M) = L \cdot t_F(M) \sim LM \log(M). \tag{13}$$

Значения L и M в принципе можно выбирать произвольно. Однако, чем они меньше, тем ниже точность преобразования.

С другой стороны, их увеличение приводит к росту вычислительных затрат. Целесообразно выбирать значения L и M таким образом, чтобы сетка координат $P_{l,m}$ покрывала диапазон исходных данных не менее плотно, чем исходная декартова W_{ij}. Например, можно потребовать [3], чтобы изменение декартовых координат Δx, Δy, вызванное шагом вдоль любой из координат полярной сетки (r, φ), не превышало единицы:

$$\Delta x_{max} = \sup_{r,\,\varphi}\left|\frac{\delta x(r,\varphi)}{\delta r}\Delta r\right| \le 1,\ \Delta y_{max} = \sup_{r,\,\varphi}\left|\frac{\delta y(r,\varphi)}{\delta \varphi}\Delta \varphi\right| \le 1. \qquad (14)$$

При этом, очевидно, $\Delta r = \frac{r_{max}}{M} = \frac{N}{M\sqrt{2}}$ и $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{L}$. Из (14) следует, что $\Delta r \le 1$, $x_{max}\Delta\varphi \le 1$. Таким образом, $M \ge N/\sqrt{2}$, $L \ge \pi N$, $LM \ge \frac{\pi}{\sqrt{2}} N^2$. Если учесть, что M должна быть степенью двойки, то получим, что

$$M \ge N,\ L \ge \pi N,\ LM\log(M) \ge \pi N^2 \log(N). \qquad (15)$$

Можно заметить, что выбранный способ параметризации соответствует $r \in [0, \frac{N}{\sqrt{2}})$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$. При альтернативном способе $r \in [\frac{-N}{\sqrt{2}}, \frac{N}{\sqrt{2}})$, $\varphi \in [0, \pi)$ значение L должно быть вдвое меньше, чем (15), а M – вдвое больше. Поскольку уменьшение M важнее, чем уменьшение L, то выбранный способ – предпочтительнее.

Для временной сложности описанного алгоритма справедлива оценка

$$T(N) \sim (\pi + 2)N \cdot t_F(N) = \theta\left(N^2 \log(N)\right). \qquad (16)$$

В это же время сложность исходного алгоритма (3) составляет $\theta\left(N^3\right)$. Однако, требования к памяти алгоритма (1) как минимум вчетверо выше. Это связано с тем, что преобразование Фурье оперирует с комплексными числами.

В выражении (16) специально были сохранены числовые коэффициенты. Они показывают, что именно третий этап алгоритма (обратное БПФ по координате r) является наиболее трудоёмким: не менее, чем в π раз, чем первый. Причиной тому является увеличение размеров матрицы $P_{l,m}$ по сравнению с W_{ij}.

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что преобразование координат оказывает существенное влияние на быстродействие алгоритма.

Модификация slice-оператора

На самом деле, теорема о центральном слое (7) гораздо более общa. Так, легко заметить, что тождественность выражений (9)-(10) не зависит от вида вектора $\vec{n}$ и скаляра r.

 ISSN 1562-9945

В настоящей работе предлагается обратить внимание на тот факт, что оператор «вырезания» центрального слоя $\hat{P}^{(2)}$ (slice-оператор) вовсе не обязательно должен быть полярным преобразованием координат. Достаточно, чтобы он удовлетворял условию (8), т.е. осуществлял $(x, y) \to (\rho, \varphi)$ преобразование вида

$$x = r \cdot n_1(\varphi), \; y = r \cdot n_2(\varphi). \tag{17}$$

В настоящей работе предлагается использовать преобразование координат, основанное на обобщённой L_p-метрике ($p > 2$):

$$r = \left(| x |^p + | y |^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Параметр φ является длиной дуги единичной окружности в метрике L_p и варьируется в пределах $0 \le \varphi \le C_p$. Полная её длина (C_p) в метрике L_p, и функции n_1, n_2 определяются из уравнений

$$\int_0^{C_p} \left(| n_1' |^p + | n_2' |^p\right)^{\frac{1}{p}} d\varphi = 1, \quad | n_1 |^p + | n_2 |^p = 1. \tag{19}$$

Для метрики L_p $r_{max} = 2^{\frac{1-p}{p}} N$, и условия (14) будут иметь вид

$$\Delta r = \frac{r_{max}}{M} = \frac{N}{M} 2^{\frac{1-p}{p}} \le 1, \quad \Delta\varphi = \frac{x_{max} C_p}{L} \le 1. \tag{20}$$

Из (20) следует, что

$$M \ge N \cdot 2^{\frac{1-p}{p}}, \quad L \ge \frac{N}{2} C_p, \quad LM \ge \lambda(p) N^2. \tag{21}$$

Известно [4], что $2\pi = C_2 \le C_p \le C_\infty = 8$. При этом $\lambda(p) = 2^{\frac{1-2p}{p}} C_p$ является строго убывающей функцией с пределом $2 < \pi / \sqrt{2}$. Её значения приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения функций C_p, $\lambda(p)$, $\varepsilon(p)$, $\tau(p)_k$

p	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	∞
$C_p / 4$	2	1,630	1,571	1,630	1,698	1,749	1,786	1,814	1,836	2
$\lambda(p)$	4	2,587	2,221	2,054	2,020	2,009	2,005	2,003	2,002	2
$\varepsilon(p)$	0,5	0,316	0,215	0,117	0,073	0,050	0,036	0,027	0,022	0
$\tau(p)$	1,285	1,416	1,440	1,416	1,390	1,371	1,358	1,348	1,340	1,285

Важным с практической точки зрения является тот факт, что r_{max} с ростом p приближается к $N/2$. Если установить $r_{max} = N/2$ (т.е. $\Delta r = 1$ и $M = N/2$), то доля теряемой частотной информации ($\varepsilon(p)$) быстро убывает. В этом случае по аналогии с (16) легко показать, что

$$T^{(p)}(N) \sim (C_p / 4 + 2)N \cdot t_F(N) = \theta\left(N^2 \log(N)\right). \tag{22}$$

Таким образом, замена обычного полярного преобразования обобщённым позволяет уменьшить число столбцов матрицы $P_{l,m}$. За счёт этого уменьшаются как затраты памяти, так и вычислительные затраты. Сравнение (16) и (22) позволяет получить примерную оценку повышения производительности (также приведённую в табл.1):

$$\tau(p) = \frac{T(N)}{T^{(p)}(N)} \geq \frac{\pi + 2}{C_p + 2} \geq 1.285. \tag{23}$$

Платой за увеличение быстродействия алгоритма является искажение пространства параметров преобразования Радона: точка (ρ, φ) по-прежему будет соответствовать прямой $\rho = \vec{\xi}^T \vec{n} = x\cos\phi + y\sin\phi$, однако параметр ρ уже не будет евклидовым расстоянием (p) от прямой до начала координат, а φ – не будет углом наклона нормали.

При этом важно заметить, что для решения задачи локализации прямых достаточно определить точки сгущения в плоскости параметров (ρ, φ). Соответственно преобразования (23) проводятся только для этих точек, а не для всего изображения.

Заключение

В настоящей статье предложен алгоритм вычисления быстрого преобразования Радона, основанный на использовании slice-оператора в L_p-метрике. Показано, что замена метрики при преобразовании координат позволяет уменьшить размер обрабатываемой матрицы на этапе одномерного обратного БПФ по координате r, а за счёт этого увеличить быстродействие алгоритма преобразования Радона не менее, чем на 28%.

Сравнительный анализ качества выполнения преобразования Радона $\varepsilon(p)$ и индекса роста быстродействия $\tau(p)$ (табл.1) показал,

 ISSN 1562-9945

что при значениях $p > 4$ эти показатели варьируются слабо, поэтому представляет собой научный и практический интерес исследование влияния метрики slice-оператора на быстродействие и разрешающую способность преобразования Радона при значениях $2 < p \le 4$ и $p = \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форсайт Д. Компьютерное зрение. Современный подход / Д. Форсайт, Ж. Понс – М., Издательский Дом "Вильямс", 2004.
2. A Fast Hough Transform for the Parametrisation of Straight Lines using Fourier Methods / [Cheyne Gaw Ho, Rupert C. D. Young, Chris D. Bradfield, Chris R. Chatwin] // Real-Time Imaging – 2000 – Vol.6, num.2, pp.113-127.
3. Волегов Д.Б. Обнаружение прямых линий на изображениях на основе преобразования Хартли. Быстрое преобразование Хафа / Д.Б. Волегов, В.В. Гусев, Д.В. Юрин// International Conference Graphicon 2006 – Новосибирск, 2006 – с.182-191.
4. Деза Е.И. Энциклопедический словарь расстояний / Е.И. Деза, М.-М. Деза – М.: Наука, 2008.