УДК 519.6

О.П. Гожий, І.А. Кобилінський

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ АНАЛІЗУ СПІВВІДНОШЕНЬ ПРИ ВИРІШЕННІ ЗАДАЧ БАГАТОЦІЛЬВОГО ВИБОРУ

Анотація. В статті розглянуто методи вирішення багатоцільових задач на основі методу аналізу співвідношень. Було розглянуто особливості побудови співвідношень та точок відліку для методів MULTIMOORA, та MULTIMOORA-FG. Наведені результати порівняння методів.

Вступ. Серед значної кількості методів вирішення багатоцільових задач (оптимізаційних, еволюційних, експертних та інш.) останнім часом динамічно розвиваються група методів на основі методу аналізу співвідношень [1-5].

Метод аналізу співвідношень (MOORA) вперше був представлений Брауерсом і Завадскасом в 2006 році. Вхідними даними для даного методу є набір визначених альтернатив і цілей, що представляються у вигляді матриці $m \times n$, де елементи матриці x_{ij} – відношення альтернативи i до цілі j; і m – число альтернатив; n – число цілей. В методі спчатку визначається система співвідношень, а потім ввизначається точка відліку.

Система співвідношень *(RatioSystem)* визначається як відношення альтернативи до цілі, що порівнюється зі знаменником, який є сумою всіх відношень альтернатив до даної цілі. Для цього знаменника найкращим рішенням буде квадратний корінь із суми квадратів відношення кожної альтернативи до цілі:

$$x_{ij}^{*} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{2}}}, \qquad (1)$$

де x_{ij} – відношення альтернативи i до цілі j; $i = 1, 2, \ldots, m$, m – кількість альтернатив; $j = 1, 2, \ldots, n$, n – кількість цілей; x_{ij}^{*} – число, яке представляє нормоване відношення альтернативи i до цілі j[2].

Нормовані відношення альтернатив до цілей знаходяться в інтервалі $[0;1]$. Але, інколи інтервал може бути $[-1;1]$. Для оптимізації, такі значення будуть додаватися у випадку максимізації і відніматися у випадку мінімізації:

$$y_i^* = \sum_{j=1}^{j=g} w_j x_{ij}^* - \sum_{j=g+1}^{j=n} w_j x_{ij}^*, \tag{2}$$

де $j = 1, 2, \ldots, g$ – цілі, які повинні максимізуватися; $j = g+1, g+2, \ldots, n$ – цілі, які повинні мінімізуватися; w_j – коефіцієнт важливості цілі (нормований або ненормований); y_i^* – оцінка альтернативи i з врахування всіх цілей [1, 2].

Значення y_i^* може бути як додатнім, так і від'ємним, в залежності від кількості цілей, що максимізуються та мінімізуються. Порядкове ранжування y_i^* за *спаданням* і визначає кінцевий вибір [7].

Теорія точки відліку *(ReferencePoint)* заснована на системі співвідношень [1, 2]. Використання теорії точки відліку починається з уже нормалізованих співвідношень. Далі обирається найбільше значення нормалізованої оцінки альтернативи для кожної цілі, у випадку, коли ціль максимізується, та найменше – коли мінімізується. Точка відліку називається реалістичною і не суб'єктивною, коли координати, підібрані для точки відліку, реалізовані в одному з варіантів альтернатив [3]. Наприклад, у нас є три альтернативи, що описані наступним способом: $A(10,100)$, $B(100,20)$ і $C(50,50)$, а також всі цілі повинні максимізуватися, то в даному випадку ідеальна точка відліку R_m має координати $(100,100)$. Для визначення метрики для точки відліку найкраще підходить метрика мінімаксуЧебишева, за якою оптимальне рішення визначається як [1, 2, 4]:

$$y^* = \min_i y_i^*, \tag{3}$$

де y_i^* – пріоритет альтернативи – визначається як

$$y_i^* = \max_j \left(w_j \cdot \left| r_j - x_{ij}^* \right| \right), \tag{4}$$

де x_{ij}^* – нормалізоване відношення альтернативи i до цілі j; $i = 1, 2, \ldots, m$, m – кількість альтернатив; $j = 1, 2, \ldots, n$, n – кількість цілей; w_j – коефіцієнт важливості цілі (нормований або ненормований); r_j – точка відліку для цілі j (якщо ціль максимізується, максимальне значення нормованих оцінок альтернатив для цілі j, якщо мінімізується – мінімальне значення); y_i^* – оцінка альтернативи i з врахування всіх цілей. Порядкове ранжування y_i^* за *зростанням* і визначає кінцевий вибір[1].

Мультиплікативна форма для багатьох цілей *(FullMultiplicativeForm)* була представлена Міллером і Старом в 1969 році. Це нелінійна, неадитивна форма, яка не використовує коефіцієнти важливості для кожної з цілей [6].

Для визначення безрозмірної корисності альтернативи використовується мультиплікативна форма Міллера і Стара:

$$U_i = \prod_{j=1}^{n} x_{ij}, \tag{5}$$

де x_{ij} – оцінка альтернати i до цілі j; $i = 1, 2, \ldots, m$, m – кількість альтернатив; $j = 1, 2, \ldots, n$, n – кількість цілей; U_i – безрозмірна корисність альтернативи i [6].

Використання вагових коефіцієнтів для визначення корисності альтернативи не є необхідним, оскільки в результаті отримаємо пропорційні величини корисності.

Для використання мультиплікативної форми як для цілей, що мінімізується, так і для цілей, що максимізуються, будемо користуватись формулою

$$U_i' = \frac{A_i}{B_i}, \tag{6}$$

де $A_i = \prod_{j=1}^{g} x_{ij}$ та $B_i = \prod_{j=g+1}^{n} x_{ij}$; де $j = 1, 2, \ldots, g$ – цілі, які повинні максимізуватися; $j = g+1, g+2, \ldots, n$ – цілі, які повинні мінімізуватися; U_i' – безрозмірна корисність альтернативи i з врахуванням всіх цілей [6].

Формула (6) називається *повною мультиплікативною формою.*

Метод MULTIMOORA – наступний крок у вирішенні задач багатоцільового прийняття рішень і був представлений Брауерсом і Задскасом у 2010 році. MULTIMOORA є найбільш стійкою системою багатоцільової оптимізації з сумісним використанням методу Delphi [6, 10].

Метод MULTIMOORA комбінує в собі стандартний підхід MOORA і повну мультиплікативну форму [6, 9]. Схема методу наведена на рис. 1.

Для визначення остаточного ранжування альтернатив, використовується теорія домінування рангів, отриманих для всіх альтернатив на всіх етапах методу MULTIMOORA [8, 9].

Основні аксіоми теорії домінування рангів

1. Для порядкової шкали ранжування завжди можливе.
2. Порядкова шкала не може створити набір кардинальних чисел
3. Порядкова шкала одного типу може бути переведена в порядкову шкалу іншого.

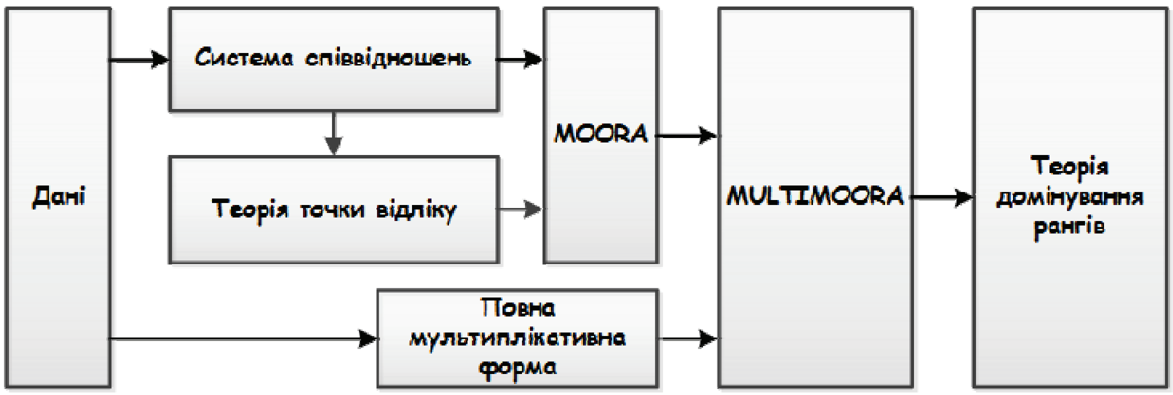

Рисунок 1 - Схема методу MULTIMOORA

Порівняння рангів з використанням теорії домінування

В методі MULTIMOORA для визначення рангів використовується елементи теорії домінування. В даному випадку корисність альтернативи представляється у безрозмірному вигляді, тому і важливість кожного методу буде однаковою [8, 9].

Абсолютне домінування означає, що альтернатива має найвищий ранг за кожним з методів (1; 1; 1).

Загальне домінування у 2-ох із 3-оьх випадків для рангів альтернатив $a < b < c < d$:

$-(d;\ a;\ a)$ в загальному переважає $(c;\ b;\ b)$;

$-(a;\ d;\ a)$ в загальному переважає $(b;\ c;\ b)$;

$-(a;\ a;\ d)$ в загальному переважає $(b;\ b;\ c)$.

 ISSN 1562-9945

Транзитивність. Якщо a домінує над b, а b домінує над c, то a домінує над c.

Повна перевага однієї альтернативи над іншою. Наприклад $(a; a; a)$ повністю переважає $(b; b; b)$ і $(b; b; b)$ іде одразу після $(a; a; a)$ за рангом.

Абсолютна рівність має форму, наприклад, для двох альтернатив з $(e; e; e)$.

Часткова рівність у двох із трьох випадків має форму $(5; e; 7)$ і $(6; e; 3)$, коли неможливо встановити *загальне домінування.*

Замкненість рангів з порушенням транзитивності має форму, наприклад:

–Об'єкт A $(11; 20; 14) \rangle$ Об'єкт B $(14; 16; 15)$;

–Об'єкт B $(14; 16; 15) \rangle$ Об'єкт C $(15; 19; 12)$, але

–Об'єкт C $(15; 19; 12) \rangle$ Об'єкт A $(11; 20; 14)$;

В даному випадку в кожному рядку альтернатива в загальному домінує ($\rangle$) над іншою, однак умова транзитивності не виконується. В такому випадку всім альтернативам присвоюється однаковий ранг [8, 9].

Метод MULTIMOORA-FG. Fuzzy MULTIMOORA forGroupDecisionMaking (MULTIMOORA-FG) було представлено у 2011 році Брауерсом як метод групового вирішення проблем вибору з використанням апарату нечіткої логіки [11].

Опис методу наводиться з використанням нечітких трикутних чисел як найбільш розповсюдженої форми подання нечіткої інформації.

Вхідними даними для даного методу є набір визначених альтернатив і цілей, що представляються у вигляді матриці X^k розміром $m \times n$, де елементи матриці $x_{ij}^k = \left(x_{ij1}^k; x_{ij2}^k; x_{ij3}^k\right)$ – оцінка альтернативи i до цілі j призначена експертом k; $i = 1, 2, \ldots, m$, m – кількість альтернатив; $j = 1, 2, \ldots, n$, n – кількість цілей; $k = 1, 2, \ldots, K$, K – кількість експертів. Значення x_{ij}^k можуть представляти як оцінки для кількісних критеріїв, так і для якісних у вигляді лінгвістичного значення із обраної шкали [11].

Далі агрегуються всі думки експертів з використанням оператора зваженого нечіткого усереднення (FWA – FuzzyWeightedAverage)

$$x_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{K} w^k x_{ij}^k}{\sum_{k=1}^{K} w^k}, \qquad (14)$$

де w^k – нечіткий коефіцієнт значимості оцінок експерта k. Якщо комітет, що приймає рішення гомогенний, то вагові коефіцієнти всіх експертів будуть рівними і становитимуть $w^k = \left(\frac{1}{K}; \frac{1}{K}; \frac{1}{K}\right)$. В результаті ми отримуємо матрицю зважених усереднених оцінок альтернатив X з елементами $x_{ij} = \left(x_{ij1}; x_{ij2}; x_{ij3}\right)$ [11].

Нечітка система співвідношень (FuzzyRatioSystem)

Нечітка система співвідношень проводить внутрішню нормалізацію оцінок експертів і переводить їх у безрозмірний вигляд, порівнюючи кожне значення із знаменником [10, 11].

$$x_{ij}^* = \left(x_{ij1}^*; x_{ij2}^*; x_{ij3}^*\right) = \begin{cases} x_{ij1}^* = \dfrac{x_{ij1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(x_{ij1}\right)^2 + \left(x_{ij2}\right)^2 + \left(x_{ij3}\right)^2\right]}}, \\ x_{ij2}^* = \dfrac{x_{ij2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(x_{ij1}\right)^2 + \left(x_{ij2}\right)^2 + \left(x_{ij3}\right)^2\right]}}, \\ x_{ij3}^* = \dfrac{x_{ij3}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(x_{ij1}\right)^2 + \left(x_{ij2}\right)^2 + \left(x_{ij3}\right)^2\right]}}. \end{cases} \quad \forall i, j \qquad (15)$$

Далі визначаються нечіткі значення пріоритетів альтернатив y_i^*. Нормовані оцінки будуть додаватися у випадку максимізації і відніматися у випадку мінімізації:

$$y_i^* = \sum_{j=1}^{j=g} w_j x_{ij}^* - \sum_{j=g+1}^{j=n} w_j x_{ij}^*, \qquad (16)$$

де $j = 1, 2, \ldots, g$ – цілі, які повинні максимізуватися; $j = g+1, g+2, \ldots, n$ – цілі, які повинні мінімізуватися; w_j – чітке значення коефіцієнту

 ISSN 1562-9945

важливості цілі (нормоване або ненормоване); y_i^* – нечітка оцінка альтернативи i з врахування всіх цілей [11].

Для визначення чіткого значення пріоритету альтернативи необхідно провести дефазифікацію нечіткого трикутного числа, використовуючи формулу (13).

$$BNP_{y_i^*} = \frac{\left(y_{i3}^* - y_{i1}^*\right) + \left(y_{i2}^* - y_{i1}^*\right)}{3} + y_{i1}^*, \tag{17}$$

Порядкове ранжування $BNP_{y_i^*}$ за спаданням і визначає кінцевий вибір [11].

Нечітка теорія точки відліку (Fuzzy Utopian Reference Point)

Нечітка теорія точки відліку заснована на базовій теорії точки відліку. Однак, за точки відліку обираються не максимальні (мінімальні) значення оцінок альтернатив, а ідеальні значення $r_j = (1; 1; 1)$ для цілей, що максимізуються та $r_j = (0; 0; 0)$ для цілей, що мінімізуються. Для визначення метрики для точки відліку найкраще підходить метрика мінімаксуЧебишева, за якою оптимальне рішення визначається як [1]:

$$y^* = \min_i y_i^*, \tag{18}$$

де y_i^* – пріоритет альтернативи – визначається як

$$y_i^* = \max_j \left(w_j \cdot d\left(r_j, x_{ij}^*\right)\right), \tag{19}$$

де x_{ij}^* – нечітке нормалізоване відношення альтернативи i до цілі j; $i = 1, 2, \ldots, m$, m – кількість альтернатив; $j = 1, 2, \ldots, n$, n – кількість цілей; w_j – чіткий коефіцієнт важливості цілі (нормований або ненормований); r_j – точка відліку для цілі j; $d\left(r_j, x_{ij}^*\right)$ – відстань (12) між трикутними числами r_j та x_{ij}^*; y_i^* – оцінка альтернативи i з врахування всіх цілей. Порядкове ранжування y_i^* за *зростанням* і визначає кінцевий вибір [1, 11].

Нечітка повна мультиплікативна форма (FuzzyFullMultiplicativeForm)

Для використання мультиплікативної форми як для цілей, що мінімізується, так і для цілей, що максимізуються, будемо користуватись формулою

$$U_i' = \frac{A_i}{B_i}, \quad (20)$$

де $A_i = (A_{i1}; A_{i2}; A_{i3}) = \prod_{j=1}^{g} x_{ij}$ та $B_i = (B_{i1}; B_{i2}; B_{i3}) = \prod_{j=g+1}^{n} x_{ij}$; де $j = 1, 2, \ldots, g$ – цілі, які повинні максимізуватися; $j = g+1, g+2, \ldots, n$ – цілі, які повинні мінімізуватися; U_i' – безрозмірна корисність альтернативи i з врахуванням всіх цілей [11].

Для визначення чіткого значення пріоритету альтернативи необхідно провести дефазифікацію нечіткого трикутного числа, використовуючи формулу (13). Порядкове ранжування $BNP_{y_i^*}$ за *спаданням* і визначає кінцевий вибір [11]. Для визначення остаточного порядку альтернатив використовується теорія домінування рангів.

Методи на основі аналізу співвідношень були реалізовані в фреймворку [14]. За допомогою фреймворку було вирішено декілька задач багатоцільового вибору: вибір кандидата на посаду, вибір і оцінювання проектів реінжинірінгу, вибір технологічного обладнання. Обсчислення показують, що найбільш ефективним і гнучким, з точки зору вирішення багатокритеріальних задач являється метод MULTIMOORA-FG.

ЛІТЕРАТУРА

1. W. Karel, M. Brauers, E. Zavadskas, F. Peldschus, Z. Turskis – The MOORA method and its application toprivatizationin a transitioneconomy // ControlandCybernetics, vol 35, No. 2, 2006.
2. W. Karel, M. Brauers, E. Zavadskas, F. Peldschus, Z. Turskis – Multi - objective decision-making forroaddesign, – TRANSPORT 2008, p.183-193.
3. M. Brauers, W. Karel.; E. Zavadskas, E. Kazimieras. – Robustnessofthe multi-objective MOORA method with a test for the facilities sector – In: Technological and economic development of economy, 15:2(2009), p. 352-375.
4. M. Brauers, W. Karel.; E. Zavadskas, E. Kazimieras; Turskis, Zenonas; Vilutiene, Tatjana – Multi-objective contractor's ranking by applyingthe Mooramethod – In: Journal of business economics and management, 9:4(2009), p. 245-255.
5. D. Kalibatas, Z. Turskis. Multicriteria evaluation of inner climate byusing MOORA method // InformationTechnologyAndControl, 2008, Vol.37, No.1.
6. M. Kracka, Willem K., M. Brauers, E.K.Zavadskas Ranking Heating Lossesin a Buildingby Applying the MULTIMOORA // Inzinerine Ekonomika-Engineering Economics, 2010, 21(4), p. 352-359.

7. Shankar Chakraborty Applicationsofthe MOORA method for decision making in manufacturing environment // Int J AdvManufTechnol (2011) 54:p. 1155–1166
8. Willem K.. Brauers M., Baležentis A., Baležentis T. Economic rankingof the Europe anunion countries by multimooraoptimization // 7th International Scientific Conference “Business and Management 2012”, May 10-11, 2012, Vilnius, LITHUANIA
9. Willem K.. Brauers M., Ginevicius R., Podviezko A. Evaluation of performance of Lithuanian commercial banks by multi-objective optimization // 7th International Scientific Conference “Business andManagement 2012”, May 10-11, 2012, Vilnius, LITHUANIA
10. Stanujkic D., Magdalinovic N., Stojanovic N., Jovanovic R.. Extension of Ratio System Part of MOORA Method for Solving Decision-Making Problems with IntervalData // Informatica, 2012, Vol. 23, No. 1, 141–154.
11. Alvydas BALEŽENTIS, Tomas BALEŽENTIS, Willem K.M. BRAUERS MULTIMOORA-FG: A Multi-Objective Decision Making Method for Linguistic Reasoning withan Application to Personnel Selection // INFORMATICA, 2012, Vol. 23, No. 2, 173–190.
12. Гожий А. П., Дыхта Л. М., Краснов Н. Е.Организация выбора вариантов реинжиниринга информационных систем для предприятия теплоснабжения // Комп’ютерні технології. Наукові праці. Випуск 130 Том 143. – Миколаїв: видавн. ЧДУ ім. Петра Могили, 2010.
13. Гожий А.П. Применение метода анализа соотношений в СППР для оценки сценарных альтернатив // Системныетехнологии. Региональный межвузовский сборник научныхтрудов. – Днепропетровск, 2010.
14. Гожий А.П., Кобылинский И.А. Разработка фреймворка для решения задач многокритериального анализа и принятия решений // Праці Одеського політехнічного університету:Науковий та науково виробничій збірник. – Одесса, 2013.- Вип. 1(40) -162-169 с.