

В.В. Біляєва, А.В. Грибанова

РОЗРАХУНОК НЕСТАЦІОНАРНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА СТІНКАХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ЗАМІРАМИ ТЕМПЕРАТУРИ

Анотація. Теоретичним шляхом отримано розв'язок зворотньої задачі теплопровідності. Для розрахунку використовувались метод регуляризації, операційний метод та метод степеневих рядів. За експериментальними замірами температури відновлені граничні умови на стінках конструкції (температура поверхні, тепловий потік і коефіцієнт тепловіддачі).

Ключові слова: зворотня задача теплопровідності, граничні умови, операційний метод, метод регуляризації.

Вступ

Організація охолодження конструкцій різноманітних технологічних агрегатів ускладнюється тим, що теплові процеси протікають при високих (3000 - 4000)K температурах і тисках. В конструкціях, що розглядаються високотемпературні продукти рухаються з дуже великою швидкістю, внаслідок чого різко зростають коефіцієнт конвективної тепловіддачі від гарячих продуктів до стінок конструкції і конвективні теплові потоки q_k . Крім того, теплообмін у конструкції характеризується високим рівнем радіації, що призводить до появи великих променистих теплових потоків q_r [1 - 3].

Внаслідок потужних сумарних конвективних і променистих теплових потоків до стінки конструкцій, температура її може досягати значень перевищуючих (1000 - 1500)⁰C. Величина цих потоків визначається значеннями режимних параметрів та температурою внутрішньої поверхні конструкції.

Коефіцієнт тепловіддачі від високотемпературних продуктів визначається з урахуванням спільного впливу конвективного і променистого теплових потоків за значеннями параметрів (тиск, склад і температура високотемпературних продуктів в ядрі газового потоку і у пристінковому шарі) на сталому режимі експлуатації [2, 3].

Час виходу аналізованих конструкцій на сталий тепловий режим порівнянно і може виявитися навіть більшим часу їх роботи при експлуатації. У цих умовах завдання визначення теплового стану в період роботи зводиться до розрахунку прогріву їх під впливом високотемпературних продуктів [3].

Конвективний теплообмін в заданому перерізі конструкції розглядається як тепловіддача між газовим потоком, який має велику швидкість і стінкою. Для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі в літературі наведені критеріальні вирази, рекомендовані різними авторами [3].

Для визначення коефіцієнта тепловіддачі, враховуючи, що з формули $q_w(y, \tau) = q_k(y, \tau) + q_{л}(y, \tau)$, при нестационарному теплообміні можна скористатися формулою

$$\alpha(y, \tau) = \frac{q_w(y, \tau) - q_{л}(y, \tau)}{T_f(y, \tau) - T_w(y, \tau)}, \quad (1)$$

де $T_f(y, \tau)$ - температура всередині конструкції; $T_w(y, \tau)$, $q_w(y, \tau)$ - температура і тепловий потік на внутрішній стінці. Безпосередньо заміряти ці величини в більшості випадків неможливо, і тому необхідно скористатися непрямими методами їхнього визначення. Значення $T_w(y, \tau)$ і $q_w(y, \tau)$ можна визначити за вимірюваним при експерименті температур всередині або на поверхні стінки, вирішуючи зворотні задачі теплопровідності.

Постановка задачі

Зворотня тепла задача для пластини формулюється наступним чином. Потрібно за замірами температури $f_w(\tau)$ і теплового потоку $g_w(\tau)$ до пластини при $x = 0$ знайти зміни температури і теплового потоку на поверхні $x = 1$. Розв'язок зворотної теплової задачі в такій постановці доцільно побудувати з використанням розв'язка задачі Коші [4,5].

Нехай в просторі змінних x , τ задана деяка гладка поверхня Γ . З кожною точкою $x, \tau \in \Gamma$ зв'язується деякий напрямок ℓ , недотичне Γ .

В околиці точки поверхні потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (2)$$

що задовольняє умовам Коші

$$T|_{x=0} = f(\tau), \quad -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = g(\tau), \quad (3)$$

де $\tau = \frac{a}{R^2} t$, $x = \frac{X}{R}$ – безрозмірні час і координата.

Розв'язок задачі [1,2,6] можна записати у вигляді

$$T(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(\tau) - \frac{x}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n+1)!} g^{(n)}(\tau) \quad (4)$$

Розв'язок (4) при заданих $f(\tau)$ і $g(\tau)$ дозволяє знайти шукані зміни температури $T_w = T(1, \tau)$ і теплового потоку $q_w(\tau) = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=1}$.

Однак у такій інтерпретації розв'язку (4), де функції $f(\tau)$, $g(\tau)$ відомі з експерименту з деякою погрішністю, необхідно враховувати і той факт, що обчислення операторів диференціювання $f^{(n)}(\tau)$, $g^{(n)}(\tau)$ нестійке до збурень у вихідних даних [1]. Таким чином, маємо типову некоректну задачу, для побудови стійкого розв'язку якої необхідно побудова регуляризованих алгоритмів.

Збережемо в розв'язку (4) кінцеве число доданків N . Введемо позначення

$$Z_1(\tau) = f'(\tau), Z_2(\tau) = f''(\tau), \dots, Z_n(\tau) = f_{(\tau)}^{(N)} \quad (5)$$

Інтегруючи (5), отримаємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду

$$f_{(\tau)} - f_{(\tau)} = \int_0^{\tau} Z_1(\eta) d\eta, \quad f_{(\tau)}^{(k)} - \sum_{v=0}^{k-1} f_{(0)}^{(k)} \frac{\tau^v}{v!} = \int_0^{\tau} \frac{(\tau - \eta)^{k-1}}{(k-1)!} Z_k(\eta) d\eta, \quad (6)$$

де $k = 1, 2, \dots, N$.

Співвідношення для теплового потоку в (4) записується аналогічно. Надалі будемо вважати, що на поверхні $x = 0$ знімання тепла відсутнє, тобто стінка теплоізолювана. Тоді розв'язок (4) з урахуванням позначень (5) записується у вигляді

$$T(x, \tau) = f(\tau) + \frac{x^2}{2!} Z_1(\tau) + \frac{x^4}{4!} Z_2(\tau) + \dots + \frac{x^{2N}}{2N!} Z_N(\tau). \quad (7)$$

Таким чином, граничні умови при $X=1$ відновлюються співвідношенням (7), в якому функція $Z_k(\tau)$ знаходяться з розв'язка інтегральних рівнянь (6)

$$AZ_k = \int_0^{\tau} \frac{(\tau - \eta)^{k-1}}{(k-1)!} Z_k(\eta) d\eta = U(\tau), \quad (8)$$

де права частина задається наближено, тобто

$$U = U_{\delta} = f(\tau) - \sum_{v=0}^{k-1} f^{(v)}(\tau) \frac{\tau^v}{v!}. \quad \text{Тут } \delta - \text{числовий параметр, що}$$

характеризує похибку у правій частині рівняння (8).

Задача (8) є в загальному випадку некоректно поставленої [1, 6, 7]. Найбільш поширеним в даний час ефективним регуляризаційним алгоритмом для її розв'язку є алгоритм, заснований на мінімізації функціонала Тихонова А.Н. [1]

$$M_{\delta}^{\alpha} [Z_k, U_{\delta}] = \rho_v^2 (AZ_k, U_{\delta}) + \alpha \Omega [Z_k] \quad (9)$$

з подальшим вибором параметра регуляризації за так званим принципом нев'язки.

Наприклад, якщо $Z_{k,\delta}^{\alpha}$ - будь-який екстремум функціоналу (9), що реалізує його глобальний мінімум при заданому α і фіксованому δ , то числовий параметр визначається з умови

$$\|AZ_{k,\delta}^{\alpha} - U_{\delta}\|_v = \delta, \quad \alpha > 0 \quad (10)$$

Регуляризаційний алгоритм (8) - (10) докладно вивчено в [1] і має стійкість до малих збурень правої частині (8).

Зворотній теплова задача для тришарової пластини формулюється наступним чином. Потрібно за замірами температур на стику другої і третьої пластини знайти зміну температури і теплового потоку на зовнішній поверхні третьої пластини ($x = 1$).

Розв'язок зворотної теплової задачі в такій постановці побудуємо використовуючи розв'язок задачі Коші

$$T_3(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f_{2,\vartheta}^{(n)}(\tau) - \frac{x}{\lambda_3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} g_2^{(n)}(\tau), \quad (11)$$

де $f_{2,\vartheta}(\tau)$ - температура, заміряна на стику другої і третьої пластини;

$g_2(\tau)$ - тепловий потік на стику другої і третьої пластини; $\tau = \frac{a_3}{R_3^2} t$,

$x = \frac{x_3}{R_3}$ - безрозмірні час і координата. В (11) входить невідома

функція $g_2(\tau)$, яка визначається з розв'язку прямої задачі для двошарової пластини.

Розв'язок даної задачі має вигляд

$$T_3(x, \tau) = f_{2,3}(\tau) + \frac{x^2}{2!} Z_1(\tau) + \frac{x^4}{4!} Z_2(\tau) + \dots + \frac{x^{2N}}{(2N)!} Z_n(\tau) + \frac{x^2}{\lambda_3} g_2(\tau) + \frac{x^4}{3!\lambda_3} Z_1^*(\tau) + \frac{x^6}{5!\lambda_3} Z_2^*(\tau) + \dots + \frac{x^{2N+2}}{(2N+1)!\lambda_3} Z_N^*(\tau), \quad (12)$$

де $f_{2,3}(\tau)$, $g_2(\tau)$ нам задані, а функції $Z_n(\tau)$, $Z_n^*(\tau)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) визначаються з розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду (6) методом регуляризації (8) – (10).

Отже, шукані величини $T_w(\tau) = T_3(1, \tau)$, $g_w(\tau) = \frac{\lambda_3}{R_3} \frac{\partial T_3(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1}$

визначаються з розв'язку (24) з використанням регуляризуючого алгоритму (8) – (10).

Експериментальні дані та результати розв'язку зворотної теплової задачі для одношарової, двошарової і тришарової пластин наведено на рис.1.

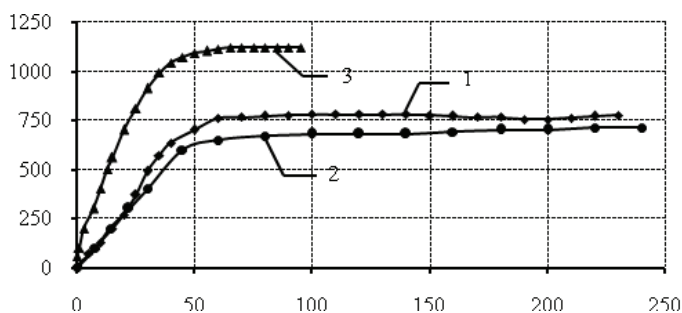


Рисунок 1

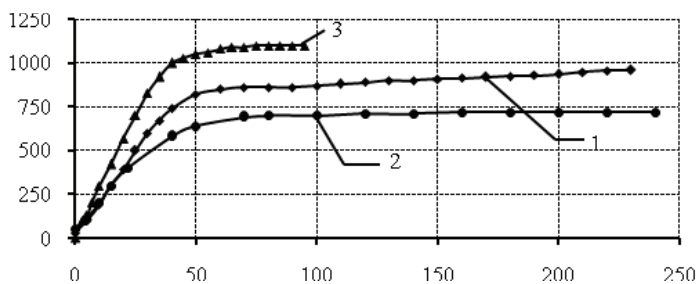


Рисунок 2

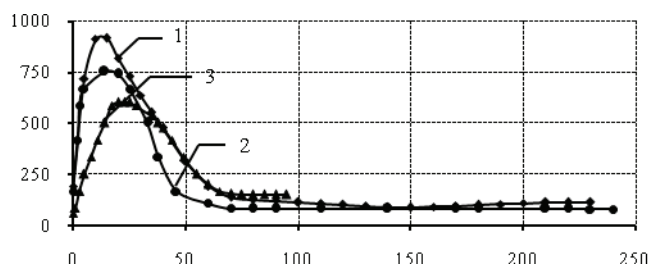


Рисунок 3

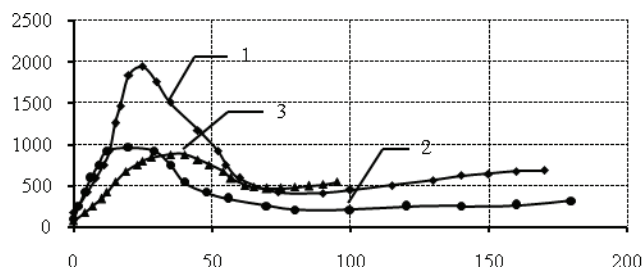


Рисунок 4

Рисунок 1 - Экспериментальні дані та результати розв'язку зворотної теплової задачі для одношарової пластини: а) експериментальна температура; б) температура поверхні; в) теплової потік; г) коефіцієнт тепловіддачі. На рисунках: 1 – одношарова, 2 – двошарова, 3 – тришарова пластини.

Висновки

Проведені розрахунки для одношарової і двошарової пластин показали, що похибка в завданні експериментальної температури до 5% викликає максимальні відхилення температури поверхні до 10% на тимчасовому інтервалі 0 - 55 с, а для двошарової 0 - 55 с; на решті тимчасовій ділянці до 5%. Максимальні відхилення теплового потоку на тих же тимчасових інтервалах складають відповідно 20% і 10%. Розрахунки для тришарової пластини показали, що похибка в завданні експериментальної температури до 5% викликає максимальні відхилення температури поверхні до 10% на тимчасовому інтервалі 0 - 75 с, 0 - 35 с, 0 - 55 с, а на решті часовій ділянці до 5%. Максимальні відхилення теплового потоку на тих же тимчасових ділянках складають відповідно 20% і 10%.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алифанов О. В. Обратные задачи теплообмена. М: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Коваленко Н. Д., Шмукин А. А., Гужва М. И., Махин В. В. Нестационарные тепловые процессы в энергетических установках летательных аппаратов. К.: Наук. думка, 1988. 224 с.
3. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. М.: Машиностроение, 1975. 624 с.
4. Алифанов О. В., Артюхин Е. А., Румянцев С. Я. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
5. Веселовский В. Б. Тепловые режимы составных элементов конструкции летательных аппаратов // Тепломассообмен – ММФ Минск: ИТМО АНБ, 1996, Т. IX (Вычислительный эксперимент в задачах тепломассообмена и теплопередачи). С. 37 – 41.
6. Веселовский В. Б. Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных теплозащитных покрытий // Прикладные вопросы аэродинамики. К.: Наук. думка, 1987. С. 95 – 100.
7. Веселовский В. Б. Нелинейные задачи теплопроводности для составных элементов конструкций // Прикладные задачи гидродинамики и тепломассообмена в энергетических установках. К.: Наук. думка, 1989. С. 113 – 117.