

И.Ю. Наумова

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЮЩИМИ ЕЕ ШТАМПАМИ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ ДЕЙСТВИИ ТОРЦЕВЫХ НАГРУЗОК

*Аннотация. Предлагается постановка задачи об исследовании процесса взаимодействия пластины со сжимающими ее жесткими штампами в результате действия симметрично приложенных торцевых нагрузок, одинаково изменяющихся во времени. На основе уточненной теории пластин получено решение поставленной задачи в конечных формулах. Проведено исследование зависимости положения границы областей сцепления и проскальзывания с трением, а также характера контактного взаимодействия между пластиной и штампами от величины прикладываемых торцевых нагрузок.*

*Ключевые слова: контактное взаимодействие, нормальное контактное взаимодействие, касательное контактное взаимодействие, область сцепления, область проскальзывания с трением, пластина, жесткие штампы, торцевые нагрузки.*

**Введение.** В работе [1] на основе уточненных уравнений теории пластин [2] с коэффициентами для рассматриваемого класса контактных задач [3] было начато исследование зависимости характера взаимодействия негладкой пластины со сжимающими ее плоскими штампами от значений прикладываемых торцевых нагрузок. В области контакта пластины и штампов в общем случае могут быть одновременно участки сцепления, проскальзывания с трением и отставания. Были установлены области значений торцевых нагрузок, при которых имеет место только сцепление по всей области контакта, только проскальзывание с трением по всей области контакта и полное отставание. Настоящая работа является продолжением работы [1]. Здесь исследуется зависимость расположения точек смены состояний сцепления и проскальзывания с трением в области контакта, а также ха-

рактически равномерного распределения контактных взаимодействий от значений симметрично приложенных торцевых нагрузок.

**Постановка задачи.** Рассматривается плоская деформация негладкой пластины толщины  $h$  и ширины  $2l$ , зажатой между плоскими штампами так, что заданы их поступательные перемещения  $W$  (рис. 1). К торцам пластины симметрично приложена продольная нагрузка, главный вектор которой  $P$ . Исследуется симметричный процесс: сначала пластина была обжата штампами путем задания их поступательного перемещения  $\pm W$  при отсутствии торцевых нагрузок ( $P = 0$ ), а затем были симметрично приложены нагрузки по торцам, одинаково изменяющиеся во времени. Ввиду симметрии этой задачи относительно плоскости  $x = 0$ , достаточно ограничиться рассмотрением лишь правой половины пластины  $0 \leq x \leq a$ , где  $a$  – полуширина области контакта, которая, несмотря на скругление штампов, приближенно считается равной полуширине штампа  $a_{ш}$ . Устанавливается зависимость между положением границы области сцепления и проскальзывания с трением и соответствующий характер распределения контактного взаимодействия от величины прикладываемой торцевой нагрузки  $P$ .

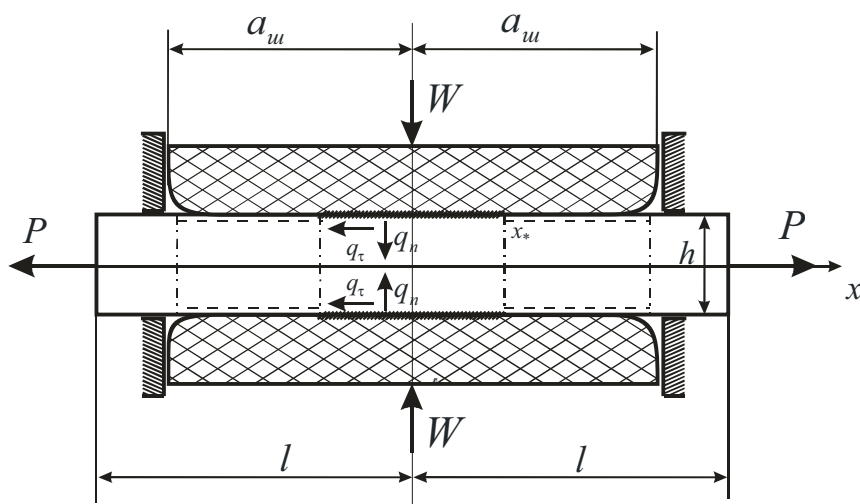


Рисунок 1

**Построение решения.** В работе [1] относительно касательного контактного взаимодействия  $q_\tau(x)$  и нормального контактного взаимодействия  $q_n(x)$  были получены разрешающие дифференциальные уравнения четвертого порядка для области сцепления и второго по-

рядка для области проскальзывания с трением. Для рассматриваемой задачи решения этих уравнений имеют вид:

– в области сцепления с учетом симметрии относительно плоскости  $x = 0$ :

$$q_{\tau}(x) = q_{\tau}^{+} \cdot \frac{\frac{d\varphi_1(x)}{dx}}{\frac{d\varphi_1(x_*)}{dx}} - \frac{\sigma_1 \cdot \left( N_c^{+} + \frac{4\nu G W}{1-2\nu} \right) \cdot \varphi_2(x)}{2 \cdot \frac{d\varphi_1(x_*)}{dx}},$$

$$q_n(x) = \frac{4(1-\nu)GW}{1-2\nu} - q_{\tau}^{+} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{2\Psi_{11}(x)}{\sigma_1^2 \frac{d\varphi_1(x_*)}{dx}} - \frac{\nu}{1-\nu} \left( N_c^{+} + \frac{4\nu G W}{1-2\nu} \right) \frac{\Psi_{22}(x)}{\sigma_1 \cdot \frac{d\varphi_1(x_*)}{dx}},$$

$$V(x) = -\frac{(1-\nu)\Lambda_1}{G} \left( q_{\tau}^{+} \cdot \frac{\frac{d\Psi_{31}(x)}{dx}}{\frac{d\varphi_1(x_*)}{dx}} - \frac{\sigma_1 \cdot \left( N_c^{+} + \frac{4\nu G W}{1-2\nu} \right) \cdot \Psi_{32}(x)}{2 \cdot \frac{d\varphi_1(x_*)}{dx}} \right); \quad (1)$$

– в области проскальзывания с трением вправо:

$$q_{\tau}(x) = \frac{2GW}{\nu} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N_T^{+} \right) \cdot \Phi_1(x, a_T) - \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N_T^{-} \right) \cdot \Phi_2(x, a_T) \right),$$

$$q_n(x) = \frac{1}{f} q_{\tau}(x), \quad V(x) = u_{\tau}(x) +$$

$$+ \frac{(1-\nu)\Lambda_1 W}{\Lambda_{31} \nu f} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N_T^{+} \right) \cdot \Phi_3(x, a_T) - \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N_T^{-} \right) \cdot \Phi_4(x, a_T) \right). \quad (2)$$

Здесь:

$N(x)$  – продольные усилия в пластине,  $x_*$  – граница области сцепления,  $q_{\tau}^{+} = q_{\tau}(x_*)$ ,  $N_c^{+} = N(x_*)$ ,  $a_T$  – половина области проскальзывания с трением,  $N_T^{-} = N_T(-a_T)$ ,  $N_T^{+} = N_T(a_T)$ ,  $V(x)$  – осредненные по толщине пластины продольные перемещения,  $u_{\tau}$  – касательные перемещения точек лицевых поверхностей пластины соответственно,  $G$ ,  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала,  $f$  – коэффициент трения скольжения,  $\Lambda_1 = 0,0025$ ,  $\Lambda_{31} = 0,115$  – коэффициенты уточненной теории пластин, соответствующие рассматриваемому классу задач [3],

$$\varphi_1(x) = \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_1 x)}{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_1 x_*)} - \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_2 x)}{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_2 x_*)}, \quad \tilde{\lambda}_{1,2} = \sqrt{n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - \sigma_1^2}},$$

$$\varphi_2(x) = \operatorname{th}(\tilde{\lambda}_2 x_*) \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_1 x)}{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_1 x_*)} - \operatorname{th}(\tilde{\lambda}_1 x_*) \frac{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_2 x)}{\operatorname{ch}(\tilde{\lambda}_2 x_*)},$$

$$n_1 = \frac{1}{12} + \frac{v}{1-v} \frac{\Lambda_{31}}{\Lambda_1},$$

$$\Psi_{11}(x) = 2k \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} + \sigma_1^2 \varphi_1(x),$$

$$\Psi_{22}(x) = \frac{d^3 \varphi_2(x)}{dx^3} - 2(n_1 + k) \frac{d\varphi_2(x)}{dx},$$

$$\Psi_{31}(x) = \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} - \beta_1 \varphi_1(x), \quad \Psi_{32}(x) = \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} - \beta_1 \varphi_2(x),$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{1-v} \sqrt{\frac{1-2v}{\Lambda_1}}, \quad k = \frac{(1-2v)\Lambda_{31}}{2v(1-v)\Lambda_1}, \quad \beta_1 = \frac{2-v+12v\Lambda_{31}}{12(1-v)\Lambda_1},$$

$$\Phi_3(x, a_t) = \frac{d\Phi_1(x, a_T)}{dx} + \beta \cdot \Phi_1(x, a_T),$$

$$\Phi_4(x, a_t) = \frac{d\Phi_2(x, a_T)}{dx} + \beta \cdot \Phi_2(x, a_T),$$

$$\Phi_1(x, a_T) = \Phi(x, a, \lambda_1, \lambda_2), \quad \Phi_2(x, a) = \Phi(-x, a, -\lambda_1, -\lambda_2),$$

$$\lambda_{1,2} = n \pm \sqrt{n^2 - \sigma^2},$$

$$\Phi(x, a_T, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\exp(2\lambda_1 a_T) \cdot (\lambda_1 \cdot \exp(-\lambda_1(a_T + x)) - \lambda_2 \cdot \exp(-\lambda_2(a_T + x)))}{1 - \exp(-2(\lambda_2 - \lambda_1)a_T)}$$

Начнем с определения возможности одновременного образования областей сцепления и проскальзывания с трением в области контакта. С этой целью вначале предположим сцепление по всей области контакта. При этом контактные взаимодействия  $q_\tau(x)$ ,  $q_n(x)$  на всей области контакта вычисляем по формулам (1), граница области сцепления совпадает с шириной штампа  $x_* = a$  и тогда  $N_c^+ = P$ , а постоянная  $q_\tau^+$  определяется из условия равенства нулю нормального кон-

тактного взаимодействия на границе  $q_n^+ = 0$ , поскольку концы штампов скруглены.

При  $P=0$ ,  $\nu=0,45$ ;  $f=0,4$ ;  $a=2$  результат вычислений приведен на рисунке 2. Как видно, в области  $1,5 \leq |x| \leq 2$ ;  $|q_\tau(x)| > f |q_n(x)|$ , то есть имеет место тенденция к проскальзыванию по краям области контакта.

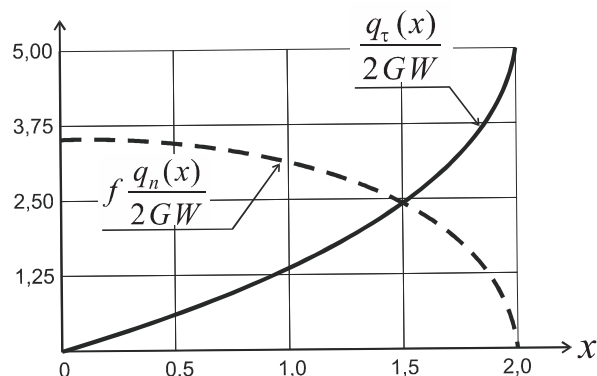


Рисунок 2

Теперь допустим наличие в области контакта двух состояний ( $x_*$  — точка перехода от сцепления к проскальзыванию):

– при  $0 \leq x \leq x_*$  — область сцепления ( $q_\tau(x)$ ,  $q_n(x)$ ,  $V(x)$  определяются формулами (1));

– при  $x_* \leq x \leq a$  — область проскальзывания с трением ( $q_\tau(x)$ ,  $q_n(x)$ ,  $V(x)$  определяются формулами (2)).

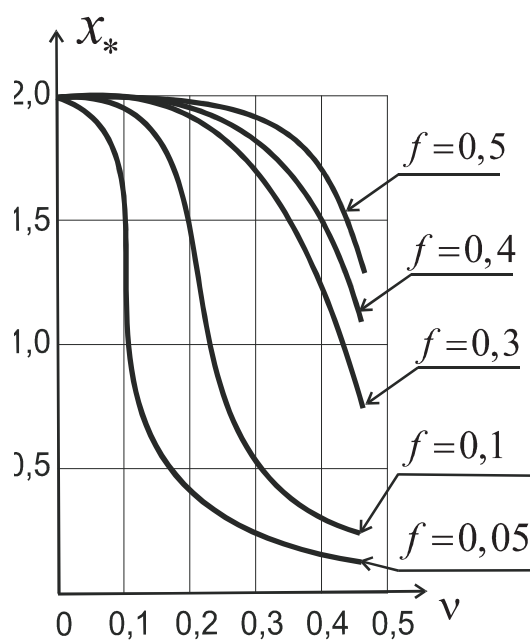


Рисунок 3

Используя краевое условие  $N_T^+ = \frac{P}{h}$  и условие сопряжения  $N_c^+ = N_T^- = N^*$  получим в формулах (1), (2) наличие трех констант  $q_\tau^+$ ,  $N^*$  и  $x_*$ , для определения которых возьмем условия непрерывности  $V(x)$  и  $u_\tau(x)$  в точке  $x = x_*$ , а также дополнительные условия непрерывности нормального и касательного контактного взаимодействия. В результате получаем систему трех соотношений:

$$V(x_* - 0) = V(x_* + 0), \quad q_\tau^+ = q_\tau(x_* + 0), \quad q_n(x_* - 0) = q_n(x_* + 0), \quad (3)$$

которые в силу формул (1) – (2) будут представлять собой уравнения относительно этих констант. Решая систему (3), получаем зависимость искомых констант от соотношения  $\frac{P}{2GWh}$ , а также парамет-

ров  $\nu$  и  $f$ . Следует отметить, что в начале процесса, когда  $P = 0$ , точка смены состояний  $x_*$  не зависит от интенсивности обжатия  $W$ . Ее зависимость от  $\nu$  и  $f$  представлена на рисунке 3. Как и следовало ожидать, когда  $\nu \rightarrow 0$ , область проскальзывания стремится к нулю, если же  $f \rightarrow 0$ , область сцепления стремится к нулю.

При увеличении растягивающей силы  $P$  область сцепления уменьшается и при  $\frac{P}{2GWh} \approx 4,44$  исчезает. При этом вместе с областью сцепления скачком исчезает и область проскальзывания, то есть пластина переходит в состояние полного отставания. При увеличении сжимающей силы область проскальзывания уменьшается до наступления полного сцепления. Зависимость величины области сцепления от величины  $\frac{P}{2GWh}$  для  $\nu = 0,45$ ;  $f = 0,4$ ;  $a = 2$  представлена на рисунке 4.

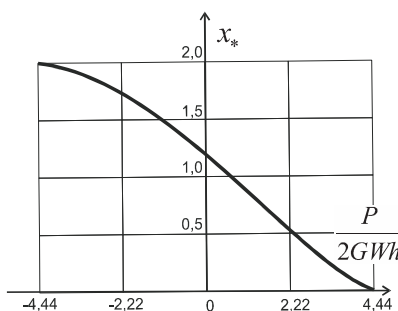


Рисунок 4

$\frac{P}{2GWh} \approx -4,27; -1,91; 0; 2; 3,47$  представлено на рисунке 5. В

окрестности точки смены состояний  $x = x_*$  наблюдается тенденция к образованию разрыва в контактных взаимодействиях. Известно [4], что в постановке теории упругости при назначении точек смены состояний сцепления – проскальзывания функции контактного взаимодействия  $q_\tau(x)$ ,  $q_n(x)$  в этой точке имеют особенность, и для осуществления процесса необходимо потребовать выполнение условий:

$$\int_{x_*}^{x_* + \varepsilon} |q_\tau(x)| dx = \int_{x_* - \varepsilon}^{x_*} |q_\tau(x)| dx = f \int_{x_* - \varepsilon}^{x_*} |q_n(x)| dx. \quad (4)$$

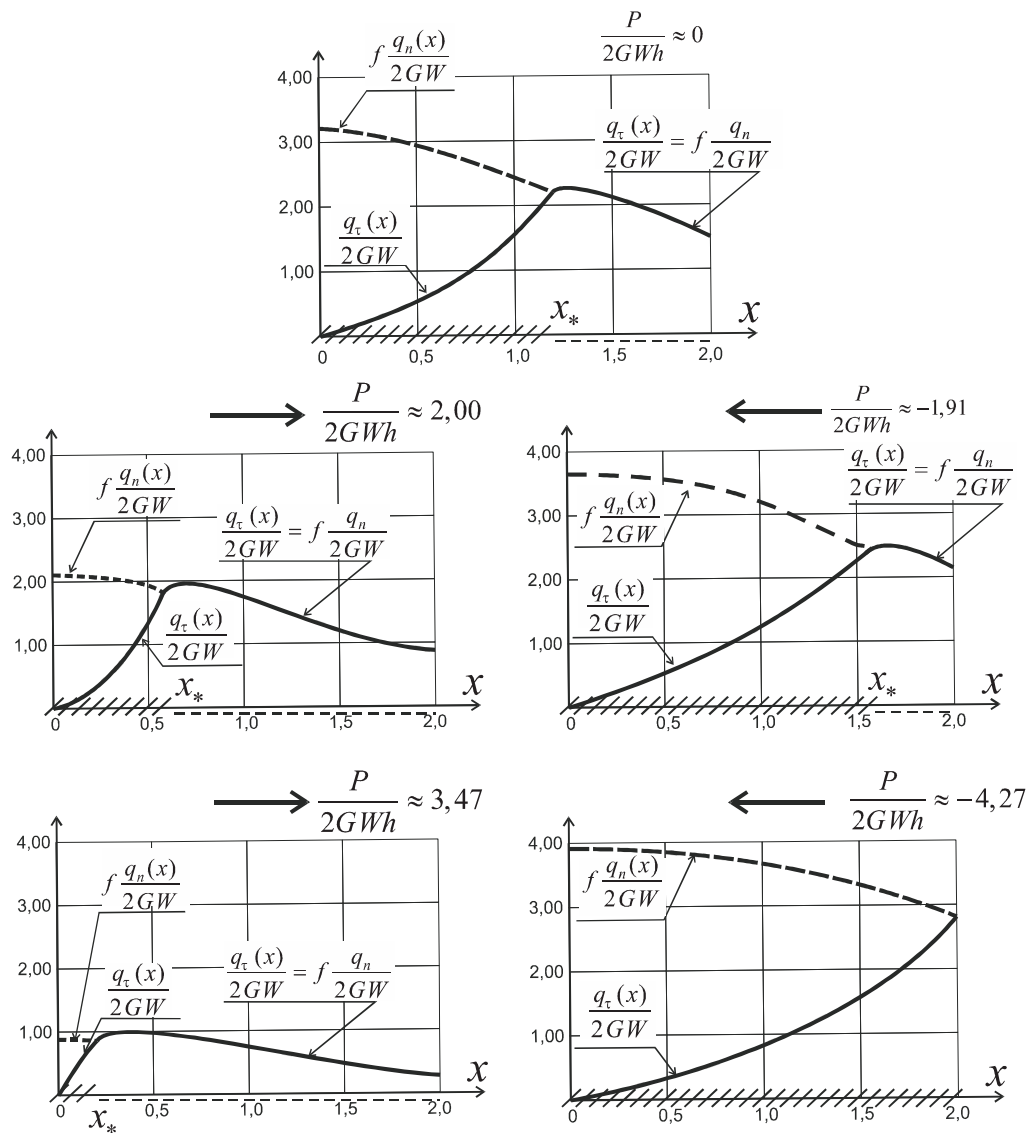


Рисунок 5

В постановке уточненной теории пластин, приемлемой для контактных задач, в рассматриваемой точке имеет место разрыв первого рода и, поэтому при рассмотрении процесса, интегральные условия (4) приближенно заменяются локальными

$$|q_{\tau}(x_* + 0)| = |q_{\tau}(x_* - 0)| = f |q_n(x_* - 0)|. \quad (5)$$

Можно показать, что если локальные условия (5) заменить интегральными (4), то в точке смены состояний  $x = x_*$  контактные взаимодействия действительно будут претерпевать разрыв.

**Выводы.** На основе уточненной теории пластин получено аналитическое решение поставленной задачи.

Установлено, что в начале процесса, когда торцевые нагрузки равны нулю, положение границы областей сцепления и проскальзывания с трением не зависит от интенсивности обжатия, а зависит от коэффициента Пуассона и коэффициента трения скольжения. Исследование этой зависимости представлено графиками.

Получена зависимость положения границы областей сцепления и проскальзывания с трением от изменения торцевых нагрузок

Представлены графики распределения контактных взаимодействий в соответствующих областях контакта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Наумова И.Ю. Исследование зависимости характера взаимодействия пластины со сжимающими ее штампами от значения торцевых нагрузок // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 4(69). – Днепропетровск, 2010. – С.11–22.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
3. Наумова И.Ю. К решению контактных задач теории пластин в температурном поле // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 5(70). – Днепропетровск, 2010. – С.148–161.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982.