УДК 519.8

В.Н. Рева

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ

Предложен приближенный полиномиальный по временной сложности алгоритм решения динамической квадратичной задачи о назначении. Для полученного решения значение целевой функции не хуже среднего.

Ключевые слова: квадратичная задачи о назначении, задача о назначении, перестановка, решение не хуже среднего.

Актуальность темы. Динамическая квадратичная задача о назначении (ДКЗН) является математической моделью ряда важных прикладных задач [1], [2]. В настоящее время не известны эффективные точные алгоритмы, позволяющие решать её в реальное время.

Анализ последних исследований. Динамическая квадратичная задача о назначении представляет собой обобщение известной NP-полной задачи – квадратичной задачи о назначении (КЗН), которая, как и задача о назначении (ЗН), является частным случаем ДКЗН.

В содержательной форме ДКЗН может быть описана следующим образом. Имеется система из n единиц оборудования (станков, бригад и т.п.), которая должна в фиксированный период времени выполнить комплекс из n работ: одна единица оборудования выполняет одну и только одну работу. Всего система функционирует T периодов времени. Размещение единиц оборудования по работам может изменяться только при переходе от одного периода обслуживания к другому, что требует соответствующей переналадки. При выполнении работ поток изготавливаемой продукции, сырьё и т.п. может перемещаться между пунктами расположения работ, перемещаемые объёмы также изменяются, вообще говоря, от периода к периоду. Эффективность работы системы зависит от суммарной эффективности назначений за всё время функционирования: затрат на назначения, затрат на перевозки и затрат на переналадку оборудования при переходе от одного периода обслуживания к другому. Необходимо для каждого периода обслуживания выбрать такие назначения, при которых общие затраты за всё время функционирование системы были минимальными.

Математическая модель содержательной постановки имеет вид задачи булева линейного программирования [1].

Пусть t – номер периода, $C_{ijklt} = f_{ikt} \cdot d_{jlt}$ – стоимость назначения оборудования i на j работу и оборудования k на l работу в период обслуживания t,

f_{ikt} – объем потока от оборудования i к оборудованию k в период t, d_{jlt} – расстояние между пунктами расположения работ j и l в период t, R_{ijlt} – стоимость переналадки оборудования при переназначении оборудования i, обслуживающего в период t работу j, на работу l.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} C_{ijklt} X_{ijt} X_{klt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{t=1}^{T-1} R_{ijlt} X_{ijt} X_{jl(t-1)} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ijt} = 1,\ j = \overline{1,n},\ t = \overline{1,T}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijt} = 1,\ i = \overline{1,n},\ t = \overline{1,T}$$

$$X_{ijt} \in \{0,1\}$$

Задача (1) относится к труднорешаемым задачам дискретной оптимизации [1], [3], что делает маловероятным существование точных алгоритмов её решения в реальное время. В работе [1] для решения задачи (1) используется метод динамического программирования, декомпозиция и метаэвристики. Применяемый подход не позволяет количественно оценивать качество получаемого решения.

Целью работы является построение эффективного алгоритма приближенного решения ДКЗН с гарантированной оценкой качества, а именно, величина полученного решения должна быть не хуже среднего значения целевой функции.

Обоснование полученных результатов. Для удобства дальнейшего анализа введем ряд обозначений и опишем задачу (1) в комбинаторной форме.

 ISSN 1562-9945

Пусть $N=\{1,2,...,n\}$, $s=(i_1,i_2,...,i_n)$ – перестановка элементов множества N, $s^t=(i_1^t,i_2^t,...,i_n^t)$ – перестановка элементов множества N в период t, определяющая назначения единиц оборудования на работы в период t, $S=(s^1,s^2,...,s^T)$ – последовательность перестановок, определяющих назначения на все T периодов, а $\overline{S}$ – множество всех таких назначений.

Можно показать, что затраты на назначение в период t описываются функцией $q^t(s^t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ikt} d_{s(i)s(k)t}$, а затраты на переналадку при переходе от обслуживания в период t к обслуживанию в период $t+1$ – функцией $L^t(s^t,s^{t+1})=\sum_{i=1}^{n} R_{is^t(i)s^{t+1}(i)t}$. Тогда общие затраты на обслуживание за все T периодов при назначении $S=(s^1,s^2,...,s^T)$ оцениваются величиной $\Phi(S)=\sum_{t=1}^{T} q^t(s^t)+\sum_{t=1}^{T-1} L^t(s^t,s^{t+1})$ и комбинаторная форма задачи (1) имеет видя

$$\Phi(S)=\sum_{t=1}^{T} q^t(s^t)+\sum_{t=1}^{T-1} L^t(s^t,s^{t+1}) \to \min_{S\in\overline{S}} \tag{2}$$

Отметим, что число элементов области минимизации равно $\left|\overline{S}\right|=(n!)^T$. Очевидно, что функция $q^t(s^t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{ikt} d_{s(i)s(k)t}$ является целевой функцией квадратичной задачи о назначении, а функция $L^t(s^t,s^{t+1})=\sum_{i=1}^{n} R_{is^t(i)s^{t+1}(i)t}$ при фиксированной перестановке s^t либо фиксированной перестановке s^{t+1} является целевой функцией задачи о назначении.

Определение. Пусть $\varphi=\varphi(x)$ – функция, определенная на множестве X. Решение $x^c \in X$ задачи:

$$\varphi(x)\to \min_{x\in X}$$

назовем **решением не хуже среднего**, если выполняется неравенство

$$\varphi(x^c)\le \frac{\sum_{x\in X}\varphi(x)}{|X|} \tag{3}$$

Пусть $\overline{S}_{i_1,i_2,\dots,i_k} \subseteq \overline{S}$ состоит из тех и только тех последовательностей перестановок $S=(s^1,s^2,\dots,s^T)$, в которых на первых k местах стоят фиксированные перестановки, а именно – $s^1=s^{i_1}, s^2=s^{i_2},\dots,s^k=s^{i_k}$; $M(\overline{S}_{i_1,i_2,\dots,i_k})=\sum\limits_{s\in\overline{S}_{i_1,i_2,\dots,i_k}}\varPhi(s)$, тогда $M(\overline{S})=\sum\limits_{s\in\overline{S}}\varPhi(S)$.

Кроме того, будем полагать, что $F_1(s^1)=q^1(s^1)+(1/(n!))\cdot\sum\limits_{s^2}L^1(s^1,s^2)$,

$F_k(s^{c_{k-1}},s^k)=q^k(s^k)+L^{k-1}(s^{c_{k-1}},s^k)+(1/(n!))\cdot\sum\limits_{s^{k+1}}L^k(s^k,s^{k+1})$, здесь $1<k\le T-1$,

$F_T(s^{c_{t-1}},s^T)=q^T(s^T)+L^{T-1}(s^{c_{T-1}},s^T)$.

Теорема. Если перестановки $s^{c_1},s^{c_2},\dots,s^{c_T}$ – решения не хуже среднего соответственно задач:

$$F_1(s^1)\to\min_{s^1} \tag{4}$$

$$F_k(s^{c_{k-1}},s^k)\to\min_{s^k},\ \text{где } 1<k\le T, \tag{5}$$

то последовательность перестановок $S^c=(s^{c_1},s^{c_2},\dots,s^{c_T})$ является решением не хуже среднего для задачи (2).

Доказательство. Из определения решения не хуже среднего (2) следует, что для перестановок $s^{c_1},s^{c_2},\dots,s^{c_T}$ выполняются неравенства

$$\sum_{s^1}F_1(s^1)=\sum_{s^1}q^1(s^1)+(1/(n!))\cdot\sum_{s^1}\sum_{s^2}L^1(s^1,s^2)\ge n!F_1(s^{c_1}), \tag{6}$$

$$\sum_{s^k}F_k(s^{c_{k-1}},s^k)=\sum_{s^k}q^k(s^k)+\sum_{s^k}L^{k-1}(s^{c_{k-1}},s^k)+(1/(n!))\cdot\sum_{s^k}\sum_{s^{k+1}}L^k(s^k,s^{k+1})\ge$$

$$n!\cdot F_k(s^{c_{k-1}},s^{c_k}),\ \text{где } 1<k\le T-1, \tag{7}$$

$$\sum_{s^T}F_T(s^{c_{T-1}},s^T)=\sum_{s^T}q^T(s^T)+\sum_{s^T}L^{T-1}(s^{c_{T-1}},s^T)\ge n!F_T(s^{c_{T-1}},s^{c_T}) \tag{8}$$

Можно проверить, что

$$M(\overline{S})=\sum_{t=1}^{T}(n!)^{T-1}\sum_{s^t}q^t(s^t)+\sum_{t=1}^{T-1}(n!)^{T-2}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}}L^t(s^t,s^{t+1}) \tag{9}$$

Используя неравенства (6), (7), (8), последовательно преобразуем (9) следующим образом. Применяя неравенство (6) и неравенство (7) для $k=2$, получаем соотношения:

$$\frac{M(\overline{S})}{(n!)^{T-1}}=(\sum_{s^1}q^1(s^1)+(1/(n!))\cdot\sum_{s^1}\sum_{s^2}L^1(s^1,s^2))+$$

ISSN 1562-9945

$$+(\sum_{t=2}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=2}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1}))\geq n!\,F_1(s^{c_1})+$$

$$+(\sum_{t=2}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=2}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1}))=$$

$$n!\cdot q^1(s^{c_1})+\sum_{s^2} L^1(s^{c_1},s^2))+(\sum_{s^2} q^2(s^2)+(1/(n!))\cdot\sum_{s^2}\sum_{s^3} L^2(s^2,s^3))+$$

$$+(\sum_{t=3}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=3}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1}))=$$

$$n!\cdot q^1(s^{c_1})+(\sum_{s^2} q^2(s^2)+\sum_{s^2} L^1(s^{c_1},s^2)+(1/(n!))\cdot\sum_{s^2}\sum_{s^3} L^2(s^2,s^3))+$$

$$+(\sum_{t=3}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=3}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1}))=n!\cdot q^1(s^{c_1})+\sum_{s^2} F_2(s^{c_1},s^2)+$$

$$+(\sum_{t=3}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=3}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1}))\geq n!\cdot q^1(s^{c_1})+n!\cdot F_2(s^{c_1},s^{c_2})+$$

$$+(\sum_{t=3}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=3}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1}))=$$

$$n!\cdot q^1(s^{c_1})+n!\cdot q^2(s^2)+n!\cdot L^1(s^{c_1},s^{c_2})+\sum_{s^3} L^2(s^{c_2},s^3)+$$

$$+(\sum_{t=3}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=3}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1})),\text{ т.е.}$$

$$\frac{M(\overline{S})}{(n!)^{T-1}}\geq n!\cdot q^1(s^{c_1})+n!\cdot q^2(s^{c_2})+n!\cdot L^1(s^{c_1},s^{c_2})+\sum_{s^3} L^2(s^{c_2},s^3)+$$

$$+(\sum_{t=3}^{T}\sum_{s^t} q^t(s^t)+(1/(n!))\cdot\sum_{t=3}^{T-1}\sum_{s^t}\sum_{s^{t+1}} L^t(s^t,s^{t+1})).$$

Действуя аналогичным образом, последовательно используя (7) для $k=3,4,....,T-1$, получаем –

$$\frac{M(\overline{S})}{(n!)^{T-1}}\geq n!\cdot\sum_{i=1}^{T-1} q^i(s^{c_i})+n!\cdot\sum_{i=1}^{T-2} L^i(s^{c_i},s^{c_{i+1}})+(\sum_{s^T} L^{T-1}(s^{c_{T-1}},s^T)+\sum_{s^T} q^T(s^T)).$$

Отсюда и из (8) следует, что $\dfrac{M(\overline{S})}{(n!)^T}\geq\Phi(S^c)=\sum_{t=1}^{T} q^t(s^{c_t})+\sum_{t=1}^{T-1} L^t(s^{c_t},s^{c_{t+1}})$,

т.е. S^c – решение не хуже среднего для задачи (2), что и завершает доказательство.

Не сложно показать, что

$$\sum_{s^{k+1}} L^k(s^k,s^{k+1}) \;=\sum_{s^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} R_{is^k(i)s^{k+1}(i)t}=(n-1)!\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{is^k(i)jk}\,, \qquad (10)$$

следовательно, $\sum_{s^{k+1}} L^k(s^k, s^{k+1})$ – целевая функция задачи о назначении. Из (10) также следует, что

$$F_1(s^1) = q^1(s^1) + (1/n)\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{is^1(i)j1}, \tag{11}$$

$$F_k(s^{k-1}, s^k) = q^k(s^k) + L^{k-1}(s^{k-1}, s^k) + (1/n)\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{is^k(i)jk} \tag{12}$$

для $1 < k \le T-1$, т.е. функции $F_1(s^1)$ и $F_k(s^{k-1}, s^k)$ для $1 < k \le T$, если перестановка s^{k-1} фиксирована, это целевые функции квадратичной задачи о назначении. Кроме того, из (11), (12) следует, что матрицы задач назначения и квадратичных задач назначения, определяющих вид целевых функций задач (4), (5), вычисляются за время порядка n^2.

Для поиска решений $s^{c_1}, s^{c_2}, ..., s^{c_T}$ не хуже среднего задач (4), (5) можно использовать алгоритм из работы [4].

Оценим временную сложность построения решения $S^c = (s^{c_1}, s^{c_2}, ..., s^{c_T})$. Вид целевых функций задач (4), (5) вычисляются за время порядка n^2, временная сложность нахождения решения s^{c_i} для квадратичной задачи назначения и задачи о назначения порядка n^3 [4], поэтому построение решения $S^c = (s^{c_1}, s^{c_2}, ..., s^{c_T})$ имеет временную сложность порядка $T\cdot n^5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sirirat Muenvanichakul, Peerayuth Charnsethinkul. The approximated dynamic programming approach to the dynamic quadratic assignment problem// Thammasat Int. J. Sc. Tech., 2007. Vol. 12, No.2 April-June. –P. 20-27.

2. Lacksonen. T. A., Enscore, E. E.,Quadratic Assignment Algorithms for the Dynamic Layout Problem // International Journal of Production Research, 1993. Vol.3l, No.3. – P. 503-517.

3. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. / Гери М., Джонсон Д. М.: Мир, 1982. 416 с.

4. Ходзинский А. Н. Последовательный алгоритм решения задач комбинаторной оптимизации // Кибернетика, 1985. №6. – С. 56-60.

ISSN 1562-9945