УДК 519.6

О.І. Дерев'янко, О.М. Ватченко

ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ОДНОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ПЕРЕТИНІ ПУАНКАРЕ

Анотація. Досліджено алгоритм чисельної ідентифікації параметрів одновимірного відображення фазового потоку Ресслера. Доведено, що використання запропонованного ітераційного алгоритму дає можливість ідентифікації одновимірних моделей багатовимірних динамічних систем, що знаходяться в хаотичному режимі.

Ключові слова: перетин Пуанкаре, система Ресслера, хаотичний режим, одновимірне відображення.

Вступ. Аналіз динаміки потоку високої розмірності у відповідному фазовому просторі є нетривіальним завданням. Найчастіше, замість аналізу безпереревного потоку, спостерігається динаміка викликана потоком на конкретному перетині фазового простору.. Зазвичай дискретне відображення є похідним від послідовного перетину потоку з перетином Пуанкаре [1].

Робота присвячена дослідженню побудуви одномірне відображення Пуанкаре для 3-мірного потоку Ресслера.

Постановка задачі. Виходячі з вимог комп'ютерного моделювання хаотичної поведінки динамічних систем, щодо вирішення задач управління такими системами, актульною є задача розробки та дослідження чисельних алгоритмів ідентифікації їх одномірних відображень. Метою роботи є дослідження запропонованого алгоритму чисельної ідентифікації наприкладі системи Ресслера.

Основна частина. Система Ресслера визначаєся диференціальними рівняннями [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c) \end{aligned} \qquad (1)$$

де x, y, z – динамічні змінні, a, b, c – параметри системи.

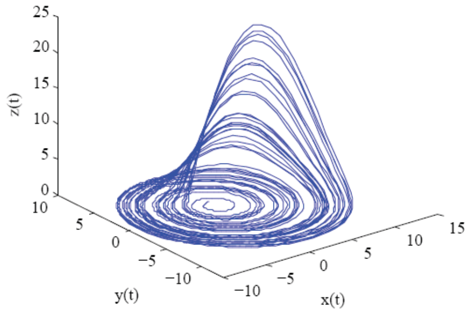

Рисунок 1 –Фазова траєкторія системи Ресслера (1)

Послідовність перетинів Пуанкаре в напрямку z розташовані радіально по зростанню кутів до осі x. Рис. 2 показує розтягування і стиснення дії фазового потоку системи Ресслера.

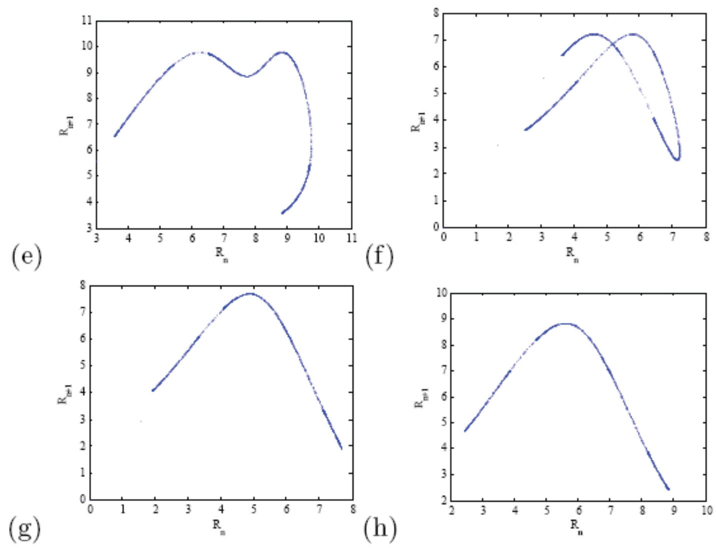

Рисунок 2 – Перетини Пуанкаре потоку (рис. 1)
при 0 є, 45 є, 90 є и 135 є до осі x

Випадки (g) і (h) є унімодальними прикладами одновимірного відображення, навідміну від (e) і (f), які є змішаними і незворотними.

Чисельні алгоритм ідентифікації одновимірного відображення системи Ресслера є послідовністю процедур.

По-перше, серед комплексу нестійких власних векторів вибирається один з найбільшою дійсною частиною $\vec{V}_1$. Перетин Пуанкаре будується як ортогональна гіперсплощина $\vec{V}_2 = \mathrm{Re}(\vec{V}_1)$. Досить закрити до рівноваги комплексний власний вектор, що обертає потік через переріз та гарантує, що перетин нормальний. У загальному випадку без забезпечення трансверсальності, перетин доводиться вибирати за результатами випробувань.

 ISSN 1562-9945

По-друге, початкова точка $\vec{X}_0$ вибрається, як:

$$\vec{X}_0 = \vec{X}_q + \varepsilon \vec{V}_2, \tag{2}$$

де $\vec{X}_q$ - точка рівноваги і ε - мале число. Фазовий потік інтегрований, і це використано в якості початкової умови, щоб знайти два послідовних перетини з перерізом Пуанкаре, $\vec{X}_A$ і $\vec{X}_B$ (вектори на перетині Пуанкаре, що ідентифікують положення нульової точки $\vec{V}_2$). N початкових точок, розподілені вздовж вектора, що сполучають $\vec{X}_A$ і $\vec{X}_B$ та інтегруються вздовж потоку, щоб знайти ціле число його перетинів з площиною Пуанкаре. Цей процес гарантує, що послідовне виконання ітерацій з незначної частини нестійкого різноманіття на перетині отримає безперервну криву.

Наступне завдання - знайти точку повернення. Щоб досягти цього використовано факт, що в точці повернення, радіус кривизни повинен бути менше, ніж в інших точках.

Описаний вище метод використано для пошуку перерізу Пуанкаре і одномірного відображення системи Ресслера (1). Потік має 2 точки рівноваги і визначається:

$$(x^-, y^-, z^-) = (0.0070, -0.0351, 0.0351)$$

$$(x^+, y^+, z^+) = (5.6929, -28.464, 28.464) \tag{3}$$

Траєкторії, які починаються на тій стороні сталої множини зовнішньої рівноваги, випливає (x^+, y^+, z^+), в той час як ті, які починаються на внутрішній спіральній стороні до внутрішньої точки рівноваги. Розглянемо тепер власні внутрішні точки рівноваги, "-"

$$(\mu_1^-, \mu_2^- \pm i\upsilon_2^-) = (-5.7, 0.097 \pm 0.99) \tag{4}$$

Один з власних векторів, що відповідають комплексним власним значенням

$$V_2 = (0.70728, -0.072725, 0.0041683) \tag{5}$$

Визначимо переріз Пуанкаре у площині, що проходить через точки (x^-, y^-, z^-) і нормалі V2. Рис. 3 показує частину потоку з осями двох ортонормованих векторів у площині, і задається

$$P_1 = (-0.1023757, -0.994738, 0.0038795)$$

$$P_2 = (-0.005434, 0.0044592, 0.9999752). \tag{6}$$

Рис. 4 показує сильне стиснення вздовж напрямку z, і слабку нелінійність для точок рівноваги $P1 = 0$, , та $P2 = 10$, де лінійне наближення дійсно можливе. Відповідне одномірне відображення Пуанкаре має вигляд рис. 4.

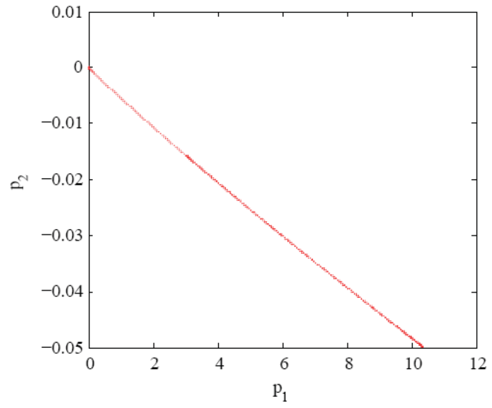

Рисунок 3 – Перетин Пуанкаре системи Ресслер (1), отриманого як розділ площини, що проходить через внутрішню рівноваги (x^{-}, y^{-}, z^{-}) в (3), з нормальним вектором (5)

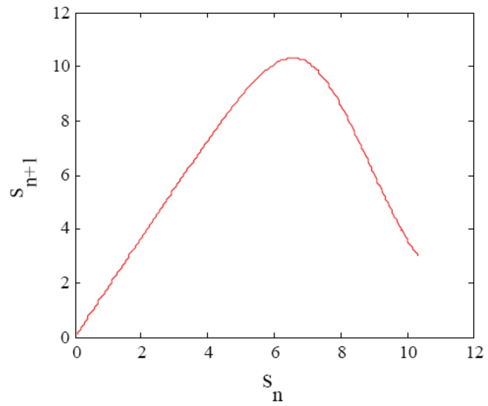

Рисунок 4 – Одномірне відображення Пуанкаре для системи Ресслера, отримане шляхом фіксації перерізу Пуанкаре для площини, що проходить через точку рівноваги з вектором нормалі V2

Суцільна лінія одновимірного відображення є квадратичною:

$$s_{n+1} = Q_\alpha(s_n) = -(\alpha + 1 + 2\alpha^{1/2})s_n^2 + 2(\alpha + \alpha^{1/2})s_n - \alpha + 1 \tag{7}$$

Це відображення може бути записано і в стандартній формі:

$$s_{n+1} = \lambda s_n(1 - s_n) = Q(s_n; \lambda) \tag{8}$$

де λ пов'язана з відрізком прямої $\lambda = 1 + (5 + 4\alpha^{1/2})^{1/2}$.

Висновки. Досліджено алгоритм чисельної ідентифікації параметрів одновимірного відображення фазового потоку Ресслера. Доведено, що використання запропонованного ітераційного алгоритму дає можливість ідентифікації одновимірних моделей багатовимірних динамічних систем, що знаходяться в хаотичному режимі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Henon, M. (1982). "On the Numerical Computation of Poincare Map," Physica 5D, 412-414.
2. Кузнецов С. П. Динамический хаос. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.– 296 с.

 ISSN 1562-9945