

В.В. Кравец, К.М. Басс, Т.В. Кравец, А.В. Харченко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ИНЕРЦИИ ГИБРИДНОГО АВТОМОБИЛЯ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОННЫХ МАТРИЦ

Аннотация. Предложен новый подход к алгоритмизации процедуры вычисления матрицы инерции гибридного автомобиля в его строительных (базовых) осях, базирующийся на использовании кватернионных матриц, составленных по параметрам Родрига-Гамильтона и линейным координатам, определяющим ориентацию и положение асимметричных подконструкций (суперэлементов) в соответствии с заданной компоновочной схемой.

Ключевые слова: кватернионные матрицы, параметры Родрига-Гамильтона, углы Эйлера-Крылова, матрица инерции, главные центральные моменты инерции, подконструкции, гибридный автомобиль.

Введение. Ведущие страны мира активно проводят научно-технические исследования по созданию и совершенствованию новых видов транспорта, в частности гибридных автомобилей, к которым предъявляются повышенные требования по технико-экономическим, эксплуатационным, экологическим характеристикам. Гибридный автомобиль отличается нестандартной структурой – компоновочной схемой в виде сложной пространственной конфигурации отдельных подконструкций (суперэлементов, блоков, узлов), т.е. является механической системой жестко связанных асимметричных твердых тел, положение и ориентация которых варьируется в процессе динамического проектирования. Асимметрия инерционных характеристик гибридного автомобиля, обусловленная смещением центра масс, поворотом главных осей инерции, приводит к дополнительному динамическому нагружению элементов конструкции, повышенному износу, биению, вибрации, шуму, дискомфорту. Всеобъемлющим показателем инерционных свойств гибридного автомобиля является его матрица (тензор) инерции, вычисленная в конструктивно удобном центре приведения и базовом триэдре.

Методы и расчетные формулы вычисления осевых и центробежных моментов инерции твердых тел разнообразных форм извест-

ны [1]. Преобразования отдельных компонент матрицы инерции к новой системе координат, начало и ориентацию осей которой выбирают исходя из условий, налагаемых конкретной технической задачей, может быть осуществлено, например, с помощью метода, изложенного в [8]. Однако применение известных методов к общему случаю преобразования, включающему пространственный поворот базового триэдра и пространственный перенос полюса, приводит к сложным и громоздким, лишенным структурного порядка формулам. Построенные на основе этих формул вычислительные алгоритмы и программы с трудом поддаются верификации и отладке в условиях ограниченного времени, не позволяют рационально использовать имеющееся стандартное программное обеспечение ЭВМ, т.е. снижает эффективность применения современных ЭВМ и оставляет проблематичным достижение достоверного результата [7].

В данной работе используется метод свободный от отмеченных недостатков [5] и базирующийся на применении математического аппарата кватернионных матриц [3, 4]. Рассматриваемый подход к построению алгоритма вычисления матрицы инерции гибридного автомобиля апробирован применительно к объектам ракетно-космической техники [7], в железнодорожном транспорте при оценке погрешностей изготовления и монтажа колесной пары [6].

1. Постановка задачи. Гибридный автомобиль рассматривается как асимметричное твердое тело, жестко состыкованное из n подконструкций (суперэлементов) в замкнутую пространственную цепь в соответствии с заданной компоновочной схемой. Например, к числу суперэлементов отнесены:

1. кузов;
2. двигатель внутреннего сгорания;
3. генератор;
4. электродвигатель;
5. аккумулятор и т.д.

Для каждого суперэлемента полагаются заданными:

- масса m_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$);
- положение (координаты центра масс) i -го суперэлемента в собственных базовых осях y_k^{Ci} ($k = 1, 2, 3$);

- главные центральные моменты инерции i -го суперэлемента, образующие диагональную матрицу I_{η}^{Ci} ;

- ориентация главных центральных осей инерции i -го суперэлемента относительно собственных базовых осей в системе углов Эйлера-Крылова $\alpha_i^n, \beta_i^n, \gamma_i^n$;

- координаты полюса i -го суперэлемента в базовых (строительных) осях автомобиля x_k^{Oi} ($k = 1, 2, 3$);

- поворот базовых осей i -го суперэлемента относительно базовых осей автомобиля в системе углов Эйлера-Крылова $\alpha_i^y, \beta_i^y, \gamma_i^y$.

Задача заключается в составлении алгоритма вычисления результирующей матрицы инерции гибридного автомобиля в системе его базовых осей в зависимости от вариаций компоновочной схемы, как по структуре, так и по составу.

2. Системы координат. Базовый триэдр гибридного автомобиля $OX_1X_2X_3$ составляют продольная ось OX_2 как пересечение плоскости симметрии автомобиля OX_2X_3 и опорной плоскости кузова OX_1X_2 ; вертикальная ось OX_3 – лежит в плоскости симметрии автомобиля, перпендикулярно опорной плоскости кузова; боковая ось – дополняет систему осей до правой. При выборе положения полюса O принимаются во внимание также технические условия, связанные с удобством монтажа.

Положение полюса O_i и ориентация базового триэдра i -го суперэлемента $O_iY_1Y_2Y_3$ выбираются с учетом технических условий на изготовление и монтаж, принимая во внимание геометрическую симметрию и распределение массы.

Главные центральные оси инерции i -го суперэлемента $C_iH_1H_2H_3$ находятся известными методами [8].

3. Приведение главных центральных моментов инерции i -го суперэлемента к собственному базовому триэдру. Решение этой задачи проводится в соответствии с методом, изложенным в [5] по следующей формуле:

$$2\bar{I}_{y_i} = 2 \left[A_i \cdot {}^t A_i \right] \bar{I}_{\eta}^{Ci} \left[A_i^t \cdot {}^t A_i^t \right] + Y_{Ci} \cdot Y_{Ci}^t - Y_{Ci} \cdot Y_{Ci}$$

где \bar{I}_{η}^{Ci} – диагональная матрица вида:

$$\bar{I}_\eta^{Ci} = \frac{1}{m_i} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{11}^{\eta Ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{22}^{\eta Ci} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{I}_{33}^{\eta Ci} \end{vmatrix};$$

$A_i, {}^t A_i, A_i^t, {}^t A_i^t$ – кватернионные матрицы, составленные по параметрам Родрига-Гамильтона:

$$a_0^i = \cos \frac{\gamma_i^\eta}{2} \cos \frac{\beta_i^\eta}{2} \cos \frac{\alpha_i^\eta}{2} - \sin \frac{\gamma_i^\eta}{2} \sin \frac{\beta_i^\eta}{2} \sin \frac{\alpha_i^\eta}{2},$$

$$a_1^i = \cos \frac{\gamma_i^\eta}{2} \cos \frac{\beta_i^\eta}{2} \sin \frac{\alpha_i^\eta}{2} + \sin \frac{\gamma_i^\eta}{2} \sin \frac{\beta_i^\eta}{2} \cos \frac{\alpha_i^\eta}{2},$$

$$a_2^i = \cos \frac{\gamma_i^\eta}{2} \sin \frac{\beta_i^\eta}{2} \cos \frac{\alpha_i^\eta}{2} - \sin \frac{\gamma_i^\eta}{2} \cos \frac{\beta_i^\eta}{2} \sin \frac{\alpha_i^\eta}{2},$$

$$a_3^i = \sin \frac{\gamma_i^\eta}{2} \cos \frac{\beta_i^\eta}{2} \cos \frac{\alpha_i^\eta}{2} + \cos \frac{\gamma_i^\eta}{2} \sin \frac{\beta_i^\eta}{2} \sin \frac{\alpha_i^\eta}{2}.$$

Y_{Ci}, Y_{Ci}^t – кватернионные матрицы, составленные по координатам центра масс y_k^{Ci} ($k = 1, 2, 3$).

4. Приведение матрицы инерции суперэлемента к базовым осям автомобиля. Решение задачи осуществляется по формуле

$$2\bar{I}_{xi} = 2[B_i \cdot {}^t B_i] \bar{I}_{yi} [B_i^t \cdot {}^t B_i^t] + [B_i \cdot Y_{Ci} \cdot {}^t B_i^t] (X_{Oi}^t - X_{Oi}) + \\ + X_{Oi} \left\{ (X_{Oi}^t - X_{Oi}) + [{}^t B_i \cdot Y_{Ci}^t \cdot B_i^t] - [B_i \cdot Y_{Ci} \cdot {}^t B_i^t] \right\}$$

где $B_i, {}^t B_i, B_i^t, {}^t B_i^t$ – кватернионные матрицы, составленные по параметрам Родрига-Гамильтона b_j^i ($j = 0, 1, 2, 3$) в зависимости от углов Эйлера-Крылова $\alpha_i^y, \beta_i^y, \gamma_i^y$;

X_{Oi}, X_{Oi}^t – кватернионные матрицы, составленные по координатам полюса i -го суперэлемента в базовых осях автомобиля x_k^{Oi} ($k = 1, 2, 3$).

5. Результирующая матрица инерции автомобиля. Искомая матрица инерции находится из очевидного равенства:

$$M \bar{I}_x = \sum_{i=1}^n m_i \bar{I}_{xi},$$

где

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

6. Верификация. Для верификации алгоритма используются свойства кватернионных матриц [4]:

$$A_i \cdot {}^t A_i = E_O,$$

$${}^t A_i \cdot A_i = E_O,$$

$$B_i \cdot {}^t B_i = E_O,$$

$${}^t B_i \cdot B_i = E_O,$$

$$Y_{Ci} \cdot Y_{Ci} = -|\bar{r}_{Ci}|^2 E_O,$$

$$Y_{Ci}^t \cdot Y_{Ci}^t = -|\bar{r}_{Ci}|^2 E_O,$$

$$X_{Oi} \cdot X_{Oi} = -|\bar{r}_{Oi}|^2 E_O$$

$$X_{Oi}^t \cdot X_{Oi}^t = -|\bar{r}_{Oi}|^2 E_O,$$

где

$$E_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|\bar{r}_{Ci}|^2 = (y_1^{Ci})^2 + (y_2^{Ci})^2 + (y_3^{Ci})^2,$$

$$|\bar{r}_{Oi}|^2 = (x_1^{Oi})^2 + (x_2^{Oi})^2 + (x_3^{Oi})^2.$$

Заключение. Изложенный подход к определению осевых и центробежных моментов инерции автомобилей сложных компоновочных схем базируется на применении математического аппарата кватернионных матриц. Приведенные матричные расчетные формулы отличаются от известных симметрией структуры, компактностью, возможностью верификации, адаптацией к компьютерным технологиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гернет М.М., Ратобыльский В.Ф. Определение моментов инерции. – М.: Машиностроение. 1969.–247с.
2. Ишлинский А.Ю. Механика относительного движения и силы инерции.–М.: Наука, 1981.– 191с.
3. Кравец В.В. Установление базиса кватернионных матриц. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий.– 2009.–5/4 (41) – с.18-23.
4. Кравец В.В. Мультипликативные композиции матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам. / / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий.– 2009.–6/4 (42) – с.20-26.
5. Kravets V.V., Kravets T.V., Kharchenko A.V. Using Quaternion Matrices to Describe the Kinematics and Nonlinear Dynamics of an Asymmetric Rigid Body // Int. Appl. Mech.– 2009.–45, N2.–P.223-232.
6. Kharchenko A.V., Kravets T.V. Usage of quaternionic matrices to define inertia moments of wheel set taking into account manufacturing and assembly errors // 20-th International conference “Current Problems in Rail Vehicles”, Zilina, September 21-23, 2011, Slovakia, Proceedings Vol. II.– P. 109-114.
7. Лысенко Л.Н., Кравец В.В. Симметризованный подход к представлению тензора инерции составных асимметричных объектов ракетно-космической техники // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение.– 1996. – №1.–С. 36-45.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. / А.И. Лурье – Физматгиз, 1961.–824с.