

Ю.П. Кондратенко, О.В. Коробко

СИНТЕЗ НЕЛІНІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМИ «ГЕНЕРАТОР КОЛИВАНЬ – РЕЗОНАТОР ТАА»

В статті розглянуто процедуру визначення амплітудно-частотної характеристики надлишкового акустичного тиску в резонаторі термоакустичної установки. Здійснено синтез нелінійних математичних моделей на основі експериментальних досліджень залежності акустичного тиску від частоти звукової хвилі в підсистемі «генератор коливаний – резонатор термоакустичного апарата (ТАА)». Наведено результати аналізу адекватності синтезованих математичних моделей з використанням статистичних методів оцінки гіпотез.

Ключові слова: термоакустична установка, резонансна частота, амплітудно-частотна характеристика, нелінійні математичні моделі, статистичний аналіз.

Вступ

В різних галузях народного господарства важливу роль відіграють теплові машини, які перетворюють теплову енергію в механічну або електричну. Новим та перспективним видом теплових машин є термоакустичні апарати (ТАА) [12], функціонування яких базується на взаємоперетвореннях акустичної та теплової енергій.

На рис. 1 представлена функціональна структура найпростішого ТАА, що включає електромеханічний генератор звукової хвилі, порожнинний резонатор з робочим середовищем (газом), теплообмінні поверхні (T_C , T_H) для подачі та відбору теплової енергії з термоакустичної установки, а також регенеративний теплообмінник (стек) для прямого та зворотного перетворення акустичної енергії в теплову.

Головна відмінність ТАА від інших теплових машин полягає в відсутності рухомих механічних вузлів. Саме акустичні коливання є тим циклічним «механізмом», який забезпечує взаємодію термодинамічних, тепло-масообмінних і гідродинамічних процесів при роботі термоакустичних установок [11]. Потужні акустичні пульсації [2,8] робочого тіла (газу) відіграють роль носія механічної енергії, яку ви-

робляють ТАА, і водночас – «виконавчого механізму» термодинамічного циклу. Саме тому, тепловим машинам такого класу присутня висока чутливість до фізичних параметрів робочого тіла (в'язкості, щільності, теплопровідності), а також до змін характеристик зовнішнього середовища (температури, тиску тощо). Отже, стабільне та ефективне функціонування ТАА є можливим тільки за умов підтримки усталених значень параметрів різнотипного характеру [13]: акустичних, гідродинамічних, теплофізичних та ін.

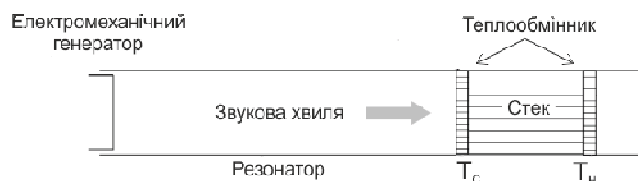


Рисунок 1 - Функціональна структура термоакустичного рефрижератора з електромеханічним генератором звукових коливань

Постановка задачі

Традиційно звукова хвиля розглядається як сукупність коливань тиску і швидкості (зміщення) робочого середовища [2,8,11], значення яких зумовлені як структурними особливостями термоакустичної установки, так і зовнішніми впливами. Частота звукового сигналу, що формується електромеханічним генератором, суттєво впливає на амплітуду акустичного тиску та величину коливального зміщення часток робочого тіла в резонаторі, і є важливим параметром при проектуванні та функціонуванні ТАА. Найефективнішим режимом роботи термоакустичних систем є функціонування на резонансній частоті [3], значення якої є апріорно невідомою величиною та залежить від структурно-параметричної побудови ТАА.

Загалом резонансну частоту коливань акустичного тиску (1) для порожнього резонатору ТАА можна обчислити за формулою [11,12]:

$$f = \frac{a}{\lambda} = \frac{\sqrt{\gamma k T / m}}{4L}, \quad (1)$$

де f – частота звукової хвилі; a – швидкість звуку; λ – довжина звукової хвилі; γ – показник адіабати; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура; m – молекулярна маса газу; $4L$ – довжина резонатора ТАА, що обчислюється з врахуванням чверті довжини звукової хвилі.

Слід зазначити, що звукова частота згідно (1) є лише наближеним значенням [3], оскільки при її обчисленні не враховуються конструктивні особливості конкретного ТАА та значення основних фізичних параметрів як зовнішнього середовища, так і самої термоакустичної установки.

Проведення і обробка результатів експериментальних досліджень конкретних типів ТАА є одним з перспективних шляхів параметричної ідентифікації резонансної частоти звукових коливань.

Метою даної статті є дослідження та аналіз характеру залежності акустичного тиску від частоти звукової хвилі та синтез нелінійної математичної моделі термоакустичної установки з вбудованим електромеханічним генератором акустичних хвиль.

Експериментальні дослідження амплітудно-частотної характеристики ТАА за надлишковим акустичним тиском

В якості дослідної термоакустичної установки авторами обрано модель термоакустичного рефрижератора (ТАР) [3,10,11], в порожнині якого знаходиться повітря (робоче тіло) під атмосферним тиском. Електромеханічний генератор (рис. 1) формує в резонаторі стоячу звукову хвилю. Експериментальний стенд оснащений мікропроцесорною системою моніторингу [3,10], що здійснює в режимі реального часу збір, обробку та відображення інформації стосовно поточного стану ТАА.

Розроблена мікропроцесорна система забезпечує формування в автоматичному режимі амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) термоакустичної системи, для чого на виході електромеханічного генератора послідовно формується ряд акустичних сигналів синусоїдальної форми з постійною амплітудою та змінною частотою. Зібрані дані щодо величини акустичного тиску кожного синусоїдального сигналу зберігаються в пам'яті системи моніторингу для подальшої обробки. Після обробки всіх даних формується масив $P_{вих0}$, що представляє собою АЧХ термоакустичної установки (рис. 2).

Спираючись на дослідні дані (рис. 2), можна зробити висновок, що на обраній частотній ділянці функція залежності акустичного тиску в резонаторі ТАР від частоти акустичного сигналу має три екстремуми [11]. Для подальшого аналізу даних слід пояснити, що розрізняють три основні типи термоакустичних установок за розподілом акустичного тиску в порожнині резонатору ТАА: на чверть, половину

та повну звукову хвилю. Саме цим значенням частот відповідають екстремальні точки на рис. 2.

Значення резонансної частоти залежить від структури ТАР, тиску в резонаторі, зовнішніх параметрів та може приблизно бути підраховано за (1). Так для дослідного ТАР розрахункова резонансна частота (2) дорівнює:

$$f = \frac{a}{\lambda} = \frac{\sqrt{\gamma k T / m}}{4L} = \frac{340}{1.2} = 283 \text{ Гц}, \quad (2)$$

а отже значно відрізняється від реального значення, що дорівнює $f \approx 220$ Гц. Тому доцільним є синтез математичних моделей термоакустичних систем, що ставлять у залежність значення акустичного тиску в резонаторі ТАА від частоти звукового сигналу. Впровадження подібних математичних моделей в системи автоматичного управління термоакустичними системами дозволять спростити алгоритми керування та оптимізації [1,2] режимів роботи ТАА.

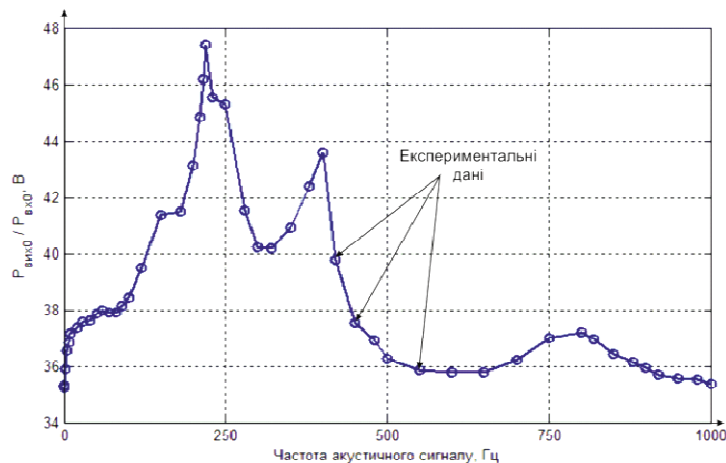


Рисунок 2 - АЧХ термоакустичного рефрижератору за акустичним тиском
Синтез нелінійних математичних моделей ТАР за акустичним тиском

Синтез математичних моделей проведено на основі експериментальних даних (рис. 2) стосовно розподілу амплітуди звукового тиску $P_{вих0}$ в резонаторі дослідної термоакустичної установки при різних частотах $f = 2\pi/\omega$ акустичного сигналу.

Слід зазначити, що шукана математична модель повинна точно передавати форму АЧХ установки та бути відносно простою в реалізації, що в подальшому дозволить скоротити час на її обробку на рівні периферійних пристроїв при впровадженні отриманої математичної моделі в систему керування термоакустичним рефрижератором. Ви-

ходячи з цього, в якості апроксимуючих функцій авторами обрано ряд Фур'є (3), ряд функцій Гауса (4) та поліном дев'ятого степеня (5):

$$p_{a1}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^8 (a_n \sin(nwf) + b_n \cos(nwf)), \quad (3)$$

$$p_{a2}(f) = a_1 e^{-\left(\frac{f-b_1}{c_1}\right)^2} + a_2 e^{-\left(\frac{f-b_2}{c_2}\right)^2} + \dots + a_8 e^{-\left(\frac{f-b_8}{c_8}\right)^2}, \quad (4)$$

$$p_{a3}(f) = a_1 f^9 + a_2 f^8 + \dots + a_9 f + a_{10}, \quad (5)$$

де $p_{aj}(f), j = \overline{1,3}$ – функціональні залежності акустичного тиску від частоти; a_n, b_n, c_n, w – коефіцієнти відповідної математичної моделі; n – порядок моделі.

В основу синтезу математичних моделей покладено використання статистичних методів побудови та оцінки парних залежностей [5,6]. Зокрема, задача регресійного аналізу методом найменших квадратів полягає у формуванні лінії регресії, при відомих k точках вибірки $P_{\text{вух}0}$. При цьому сума Z квадратів відхилень Δ_i^2 цих точок вздовж осі ординат від проведеної лінії регресії повинна бути мінімальною.

Задачу методу найменших квадратів аналітично можна виразити наступним виразом [5]:

$$Z = \sum_{i=1}^k \Delta_i^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

де Δ_i – відхилення вздовж осі ординат значення аналітичної функції $p_{aj}(f)$ від експериментального значення $P_{\text{вух}0}$.

Для фізичної моделі можна записати:

$$Z_j = \sum_{i=1}^k [P_{\text{вух}0i} - p_{aj}(f_i)]^2 \rightarrow \min, i = \overline{1,k}, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Побудована на основі умови (7) лінія регресії дозволяє з певною ймовірністю передбачити в інтервалі $f \in [f_1; f_n]$ значення функції $p_{aj}(f)$, відсутні в таблиці результатів експериментальних досліджень $P_{\text{вух}0}$.

В результаті обчислень отримаємо наступні значення коефіцієнтів для обраних математичних моделей:

а) ряд Фур'є (3)

$$a \in \left\{ -5.776 \cdot 10^{12}, 9.312 \cdot 10^{12}, -4.686 \cdot 10^{12}, 1.187 \cdot 10^{12}, \right. \\ \left. 7.557 \cdot 10^{10}, -1.497 \cdot 10^{11}, 4.079 \cdot 10^{10}, -3.809 \cdot 10^9 \right\};$$

$$b \in \left\{ 4.018 \cdot 10^{12}, -4.969 \cdot 10^{12}, 3.264 \cdot 10^{12}, -1.291 \cdot 10^{12}, \right. \\ \left. 2.979 \cdot 10^{11}, -3.423 \cdot 10^{10}, 1.142 \cdot 10^9 \right\};$$

$$w = 0.0002992.$$

б) ряд функцій Гауса (4)

$$a \in \{5.529, 4.961, 6.239, 1.983, 0.1906, 35.32, -0.03014, -1.413\};$$

$$b \in \{228.6, 394.8, 241.3, 784.6, 1294, 2693, 2200, 0.4843\};$$

$$c \in \{33.77, 25.39, 214.5, 120.6, 250.9, 24230, 22.22, 2.106\}.$$

в) поліном (5)

$$a \in \left\{ -6.902 \cdot 10^{-27}, 8.766 \cdot 10^{-23}, -4.573 \cdot 10^{-19}, 1.257 \cdot 10^{-15}, -1.924 \cdot 10^{-12}, \right. \\ \left. 1.56 \cdot 10^{-9}, -5.004 \cdot 10^{-7}, -7.833 \cdot 10^{-5}, 0.06299, 35.36 \right\}.$$

На рис. 3 наведено графіки отриманих математичних моделей (в порівнянні з експериментальною вибіркою) на дослідному частотному відрізку. В подальшому проведемо порівняльний аналіз синтезованих математичних моделей ТАР.

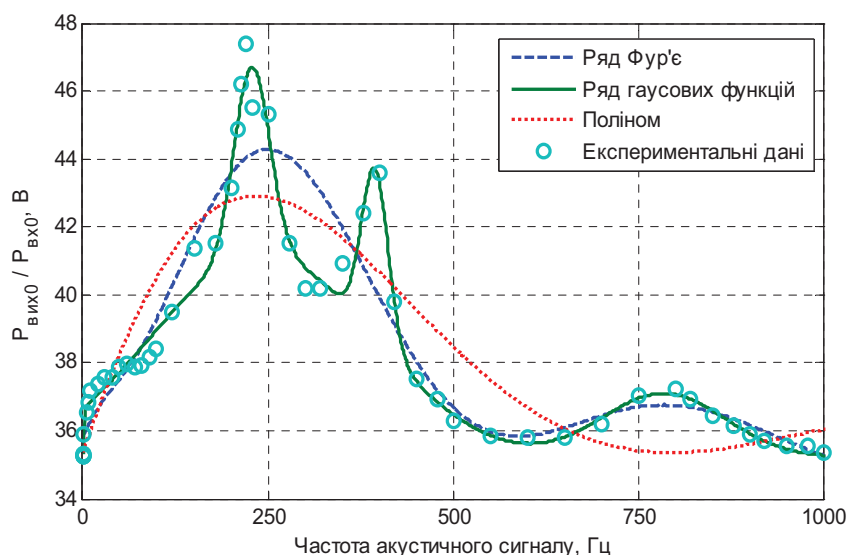


Рисунок 3 - Синтезовані математичні моделі термоакустичного рефрижератора за акустичним тиском

Аналіз адекватності синтезованих математичних моделей

Аналіз адекватності отриманих математичних моделей (3)-(5) виконано з використанням методів оцінки гіпотез математичної статистики [4], а саме:

Сума квадратів помилок (SSE), що показує загальне відхилення значень апроксимованої моделі $p_{aj}(f), j = \overline{1,3}$ від відповідних значень експериментальних досліджень $P_{вух0}$.

$$SSE_j = \sum_{i=1}^k [P_{вух0i} - p_{aj}(f_i)]^2 \rightarrow 0, j = \overline{1,3}. \quad (8)$$

Коефіцієнт детермінації (R^2), що є часткою дисперсії відхилень залежної змінної від її середнього значення. Іншими словами, R^2 – це квадрат змішаної кореляції між експериментальними значеннями та значеннями синтезованої математичної моделі.

$$R_j^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k [P_{вух0i} - p_{aj}(f_i)]^2}{\sum_{i=1}^k [P_{вух0i} - \overline{P_{вух0}}]^2} \rightarrow 1, j = \overline{1,3}, \quad (9)$$

де $\overline{P_{вух0}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_{вух0i}$ – середнє арифметичне значення дослідної вибірки.

Корінь із середнього для квадрата помилки ($RMSE$) є оцінкою стандартного відхилення випадкової компоненти між даними синтезованої регресійної моделі та дослідними значеннями.

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [P_{вух0i} - p_{aj}(f_i)]^2} \rightarrow 0, j = \overline{1,3}, \quad (10)$$

F -критерій Фішера (F_j), що показує наскільки рівняння регресії краще передбачає результати експериментів в порівнянні із середнім значенням $\overline{P_{вух0}}$, та розраховується як співвідношення між загальною дисперсією $\overline{\sigma_{заг j}^2}$ (11) та залишковою дисперсією $\overline{\sigma_{зал j}^2}$ (12):

$$\overline{\sigma_{заг j}^2} = \frac{\sum_{i=1}^k P_{вух0i}^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k P_{вух0i} \right)^2}{k-1}, j = \overline{1,3} \quad (11)$$

$$\overline{\sigma_{зал j}^2} = \frac{\sum_{i=1}^k [P_{вух0i} - p_{aj}(f_i)]^2}{k-2}, j = \overline{1,3} \quad (12)$$

$$F_j = \frac{\overline{\sigma_{заг j}^2}}{\overline{\sigma_{зал j}^2}} \rightarrow \max, j = \overline{1,3} \quad (13)$$

Результати розрахунків статистичних оцінок адекватності синтезованих математичних моделей (3)-(5) наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Порівняльна таблиця адекватності математичних моделей

Апроксимуюча функція		SSE	R^2	$RMSE$	F	
					$\sigma_{заг}^2$	$\sigma_{зал}^2$
$j=1$	Ряд Фур'є	74.9	0.89	1.24	7.16	
					10.84	1.51
$j=2$	Ряд функцій Гауса	7.69	0.98	0.43	69.27	
					10.84	0.16
$j=3$	Поліном	127.25	0.81	1.52	4.42	
					10.84	2.45

На основі отриманих статистичних даних (табл. 1) можна зробити висновок, що найкращий результат відповідності дослідним даним має математична модель, яка апроксимує отримані дані рядом функцій Гауса (4).

Висновки

В результаті експериментальних досліджень авторами підтверджено залежність амплітуди акустичного тиску в резонаторі термоакустичного рефрижератора з електромеханічним генератором від частоти звукового сигналу. Виявлено невідповідність між розрахованим та дослідним значеннями резонансної частоти ТАР ($f_p = 283$ Гц $>$ $f_0 = 220$ Гц), що спричинена структурно-параметричними особливостями конкретної термоакустичної установки.

Із використанням статистичних методів побудови та оцінки парних залежностей отримано амплітудно-частотну характеристику термоакустичного рефрижератора за акустичним тиском (рис. 2). Спираючись на отримані дані, авторами із використанням методу найменших квадратів (7) синтезовано ряд математичних моделей (3)-(5) АЧХ ТАР (рис. 3).

Аналіз адекватності (табл. 1) синтезованих регресійних моделей показує, що найкращий результат відповідності дослідним даним має математична модель, яка апроксимує отримані дані рядом функцій Гауса (4).

Слід відмітити, що отримана АЧХ термоакустичного рефрижератора має яскраво виражений екстремальний характер, а тому в подальшому доцільним є застосування алгоритмів пошуку екстремумів

функції для визначення резонансної акустичної частоти дослідної термоакустичної установки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аттетков А.В. Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
2. Зарембо Л.К. Введение в нелинейную акустику / Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. – М., 1966. – 520 с.
3. Кондратенко Ю.П. Аналіз впливу частоти звукового сигналу на ефективність термоакустичних процесів / Ю.П. Кондратенко, О.В. Коробко // Автоматика – 2011 / Automatics – 2011: Матеріали конференції, Львів. – 2011. – С. 390-391.
4. Кондратенко Ю.П. Нелинейные регрессионные математические модели магнитных систем для регистрации сигналов проскальзывания / Ю.П. Кондратенко, А.С. Шишкин // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування. – 2007. – №33. – С. 127-134.
5. Королюк В.С. Справочник по теории вероятности и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
6. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Высш. шк., 1988. – 239 с.
7. Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Методы современной теории автоматического управления / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.
8. Стретт Дж. В. Теория звука. Том. 2 // Государственное издательство технико-теоретической литературы. – М., 1958. – 475 с.
9. Юдаев Б.Н. Техническая термодинамика. Теплопередача. – М.: Высш. шк., 1988. – 479 с.
10. Kondratenko Y. Multisensor data acquisition system for thermoacoustic processes analysis / Y. Kondratenko, V. Korobko, O. Korobko // Proceedings of the 6th IEEE international conference IDAACS'2011, Prague. – 2011. – №1. – PP. 54-58.
11. Rott N. Thermoacoustics // Adv. Appl. Mech. – №20 (135). – 1980.
12. Tomonaga T. Fundamental Thermoacoustics // Tokyo, Uchida Rokakuno Publishing, 1998.
13. Wheatley J.C. The natural heat engines / J.C. Wheatley, G.W. Swift, A. Migliori // Los Alamos Science. – 1986. – №2 (14).