УДК 519.85

О.О. Ємець, О.О. Черненко

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ: МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ

Анотація. В статті розглядається точний комбінаторний метод розв'язування задачі цілочислової оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі. Побудовано алгоритм методу гілок та меж для розв'язування такої задачі.

Ключові слова: метод гілок та меж, дробово-лінійна оптимізація.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Більшість задач, що досліджується в теорії оптимізації (див., наприклад, [1–12]), зумовлені практичними потребами. При моделюванні часто використовуються дробово-лінійні цільові функції з додатковими умовами, що накладаються на змінні. Зокрема, для прогнозування та оцінки діяльності будь-якої галузі виробництва використовуються відносні показники, які записуються як відношення абсолютних, при цьому деякі змінні мають набувати цілих значень (валовий випуск продукції та ін.). Враховуючи вищевикладене, актуальними залишаються розробка методів та алгоритмів розв'язування задач з дробово-лінійною цільовою функцією та проблема пошуку більш ефективних алгоритмів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботах [7–12] описані методи та алгоритми розв'язування лінійних задач оптимізації з вимогою цілочисельності змінних. Розроблено методи розв'язування задач з дробово-лінійною цільовою функцією, в тому числі на комбінаторних множинах [3–5].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Серед великої кількості різних класів оптимізаційних задач задачі цілочислової оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією не розглядалися, а тому видається доцільним запропонувати постановку таких задач та методи їх розв'язування.

Мета даної статті – поширити метод гілок та меж, що грунтується на ідеях Ленд та Дойг, для розв'язування задач цілочислової оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією та обгрунтувати алгоритм цього методу [8].

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Розглянемо задачу вигляду: знайти

$$f(x^*) = \max_{x\in R^n} f(x) = \max_{x\in R^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}, \qquad x^* = \arg\max_{x\in R^n} f(x) \tag{1}$$

за системи обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad \forall i \in J_m ; \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \forall j \in J_n; \tag{3}$$

$$x_j - \text{цілі числа } \forall j \in J_n , \tag{4}$$

де $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, c_j, d_j, a_{ij}, b_i – дійсні сталі $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_n$, J_k позначає множину перших k натуральних чисел $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Розв'язування (1)–(4) почнемо з розв'язування послабленої задачі, відкинувши умову (4). Застосуємо до задачі (1)–(3) відображення ψ, яке задамо співвідношеннями

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}, \qquad y_j = x_j y_0 \quad \forall j \in J_n, \quad x \in R^n , \tag{5}$$

де знаменник не обертається в нуль (вважаємо $y_0 > 0$ $\forall x$, що задовольняють (2),(3)) та перейдемо до задачі з лінійною функцією цілі: знайти

$$F(y^*) = \max_{y\in R^{n+1}} F(y) = \max_{y\in R^{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \right), \qquad y^* = \arg\max_{y\in R^{n+1}} F(y) \tag{6}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} 0, \qquad \forall i \in J_m , \tag{7}$$

$$y_j \ge 0 \ \ \forall j \in J_n^0 = J_n \cup \{0\} , \tag{8}$$

 ISSN 1562-9945

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1, \tag{9}$$

де $y = (y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \in R^{n+1}$.

Зауважимо, що задачі (1)–(3) та (6)–(9) еквівалентні, тобто $f(x^*) = F(y^*)$.

Запишемо алгоритм розв'язування задачі (1)–(4), в основі якого лежить загальна схема алгоритму Ленд та Дойг [8]. Позначимо κ – номер ітерації (один повний цикл алгоритму).

Крок 1. Відкинути умову (4) і застосувати перетворення (5) до (1)–(3), отримаємо (6)–(9).

Крок 2. Розв'язати лінійну задачу (6)–(9).

Крок 3. Якщо (6)–(9) не має розв'язку, то не має розв'язку (1)–(4), інакше нехай $\overline{x} = \overline{y}\left(y_0\right)^{-1}$ – екстремаль задачі (1)–(3).

Крок 4. Якщо $\overline{x} = \left(x_1', x_2', \dots, x_n'\right)$ задовольняє (4), то $\left\langle f(\overline{x}), \overline{x}\right\rangle$ – розв'язок задачі (1)–(4), інакше перейти на крок 5.

Крок 5. Визначити найменший індекс j компоненти x_j' точки $\overline{x}$, такої що x_j' – не ціла.

Крок 6. Записати два обмеження, що в області (2), (3) відтинають $\overline{x}$:

$$x_j \le \left\lfloor x_j' \right\rfloor, \tag{10}$$

$$x_j \ge \left\lfloor x_j' \right\rfloor + 1, \tag{11}$$

де $\left\lfloor x_j' \right\rfloor$ – ціла частина x_j'.

Крок 7. Застосувати до (10), (11) перетворення (5):

$$y_j \le \left\lfloor x_j' \right\rfloor y_0, \tag{12}$$

$$y_j \ge \left(\left\lfloor x_j' \right\rfloor + 1\right) y_0. \tag{13}$$

Крок 8. Приєднати до останньої задачі вигляду (6)–(9) обмеження (12) та застосувати кроки 2–4 до розв'язування (6)–(9), (12). Якщо задача (6)–(9), (12) не має розв'язку, перейти на крок 9, інакше $\left\langle F(\overline{y_1}), \overline{y_1}\right\rangle$ – розв'язок (6)–(9), (12).

Крок 9. Приєднати до останньої задачі вигляду (6)–(9) обмеження (13) та застосувати кроки 2–4 до розв'язування (6)–(9), (13). Якщо задача (6)–(9), (13) не має розв'язку, перейти на крок 10, інакше $\left\langle F(\overline{y_2}),\ \overline{y_2} \right\rangle$ – розв'язок (6)–(9), (13).

Крок 10. Якщо жодна із задач вигляду (6)–(9), (12) та (6)–(9), (13) розв'язку не має, то задача (1)–(4) теж розв'язку не має у випадку $\kappa = 1$. Для $\kappa > 1$ вибрати для подальшого галуження іншу область з точкою, знайденою на кроці 12 $(\kappa - 1)$-ї ітерації, і перейти на крок 4.

Крок 11. Якщо одна із задач вигляду (6)–(9), (12) чи (6)–(9), (13) розв'язку не має, то перейти на крок 4, вважаючи $\overline{x} = \overline{y}_i \left(y_0\right)^{-1}$, де i – номер точки, що надає цільовій функції найбільшого в області D_i значення.

Крок 12. Якщо обидві задачі вигляду (6)–(9), (12) та (6)–(9), (13) мають розв'язки, то для подальшого галуження вибрати ту область, яка містить точку з більшим значення цільової функції, і перейти на крок 4, вважаючи $\overline{x} = \overline{y}_i \left(y_0\right)^{-1}$, де i – номер точки $\overline{y}_i$, що надає цільовій функції більшого з двох значень $F\left(\overline{y}_j\right)$, $j = 1,2$. У випадку, коли значення цільових функцій збігаються, перейти на крок 4 і проаналізувати розв'язок кожної із задач.

Обґрунтуємо вищеописаний алгоритм. Опишемо спосіб галуження, відсікання та оцінювання методу гілок та меж (МГМ), виходячи із специфіки розв'язуваної цим методом задачі.

Спосіб галуження. Позначимо D – допустиму область вихідної задачі, тобто множину точок, що задовольняють умовам (1)–(4). Розіб'ємо множину D на частини, що не мають спільних точок, тобто $D = D_1 \cup D^* \cup D_2$, $D_1 \cap D^* \cap D_2 = \varnothing$, де D_1 – множина допустимих розв'язків задачі (1)–(4) при додаванні обмеження (10); D^* – множина допустимих розв'язків задачі (1)–(4) при додаванні обмеження $\left\lfloor x_j' \right\rfloor < x_j < \left\lfloor x_j' \right\rfloor + 1$; D_2 – множина розв'язків задачі (1)–(4) при додаванні обмеження (11). Очевидно, що множина розв'язків D^* є порожньою для (1)–(4) і з подальшого галуження може бути виключена.

Оцінювання. Кожній з множин D_i – допустимих розв'язків задачі вигляду: знайти (1) за обмежень (2), (3) та за додаткового обмеження (10) або (11) надають оцінку (верхню межу): $\xi\left(D_i\right) = \max\limits_{x \in D_i} f\left(x\right)$. Якщо оптимальні плани отриманих задач задовольняють умови цілочисельності, то план з максимальною оцінкою буде оптимальним планом вихідної задачі, інакше – продовжити процес розбиття. При цьому для подальшого розбиття вибирають множину D_i з найбільшою оцінкою. Для ітерацій $\kappa > 1$ у випадку, якщо вибрана область D_i не містить точок з цілочисловими координатами, використовуємо для подальшого галуження область з меншою оцінкою, знайденою на попередній ітерації (крок 10 алгоритму).

Розбиваючи в процесі розв'язування множину D на підмножини D_i, $\bigcup\limits_{\forall i} D_i = D$, маємо, що оцінка для будь-якої з них не більша за оцінку для вихідної множини D, тобто для всіх D_i має місце нерівність: $\xi\left(D_i\right) \leq \xi\left(D\right)$.

Правила відсікання (крок 6 алгоритму) враховують той факт, що відсікаються тільки ті області D_i, які не містять точок, що задовольняють (4).

Враховуючи спосіб галуження та правила відсікання, має місце наступне твердження.

Теорема. Алгоритм МГМ, застосовний до задачі (1)–(4), знаходить її оптимальний розв'язок.

Висновки з даного дослідження. Отже, в роботі побудовано алгоритм методу гілок та меж для розв'язування задач цілочислової оптимізації у випадку дробово-лінійної цільової функції.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Доцільним видається надалі програмно реалізувати даний алгоритм та поширити його для розв'язування задач оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на інших множинах, зокрема комбінаторних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, В. А. Рощин. – К.: Наукова думка, 1980. – 266 с.
2. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
3. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. – К.: Наукова думка, 2005. – 117 с.
4. Емец О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К.: Наук. думка, 2011. – 139 с.
5. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках / О. А. Емец, Н. Г. Романова. – К.: Наук. думка, 2010. – 105 с.
6. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т.Н. Барболина. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с.
7. Корбут А. А. Метод ветвей и границ: обзор теории, алгоритмов, программ и приложений / А. А. Корбут, И. Х. Сигал, Ю. Ю. Финкельштейн // Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimiz. – 1977. – № 2. – P. 253–280.
8. Land A. H. An autmatic method of solving discrete programming problems / A. H. Land, A.G. Doig // Econometrica. – 1960. – V. 28. – P. 497–520.
9. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
10. Кофман А. Методы и модели исследования операций: Целочисленное програмирование / А. Кофман, А. Анри-Лабордер. – М.: Мир, 1977. – 432 с.
11. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
12. Ляшенко И. Н. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова. Н. З. Шор. – К.: Вища школа, 1975. – 372 с.

 ISSN 1562-9945