УДК 539.3

В.Н. Сапегин

УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ВОЛНОВОЙ МОДЕЛИ А. Н. КРЫЛОВА ДЛЯ РАСЧЕТА УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С БОЛЬШИМИ ВНЕШНИМИ ГРАНИЦАМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННОЙ ВНУТРЕННЕЙ НАГРУЗКИ

Аннотация. В работе рассмотрено применение способа суммирования, используемого для знакопостоянных сходящихся рядов для решения задачи А. Н. Крылова о нестационарном деформировании упругой среды под действием переменной внутренней нагрузки. Показано, что использование подобного способа суммирования позволяет рассчитывать напряжения и перемещения для упругих сред с большими внешними радиусами. Указан алгоритм вычисления суммы знакопостоянных рядов, содержащих разрывы второго рода. Произведена сравнительная оценка точности полученных результатов.

Ключевые слова: нестационарное деформирование упругой среды, метод суммирования знакопостоянных рядов, разрывы второго рода.

Актуальность и постановка задачи. Для толстостенного цилиндра, находящегося под действием переменной внутренней нагрузки, получено решение в перемещениях в виде бесконечного ряда по собственным формам колебаний для соотношения диаметров цилиндра один к десяти [1]. Использовать это решение для расчета цилиндров с большими внешними радиусами не удается из-за периодических разрывов второго рода суммы ряда, которые возникают при определенных порядковых номерах членов ряда (порядковых номеров корней трансцендентного уравнения). В работе [2] анализируется возможность переноса некоторых свойств суммы конечного числа слагаемых (используемых в алгебре и арифметике) на суммы бесконечных рядов, но при соблюдении определенных условий. Так, для сходящегося ряда при произвольном объединении его членов сумма ряда не изменяется, и такой ряд обладает сочетательным свойством [2]. Необходимым условием этого должно быть постоянство знака всех слагаемых внутри произвольно объединенных членов ряда. Для сходящего-

 ISSN 1562-9945

ся знакопостоянного ряда справедлив и переместительный закон, и потому ряд, составленный из него перестановкой его членов внутри ряда, также сходится [2].

Проверим все выше сказанное сначала на известном классическом решении А. Н. Крылова, справедливом для соотношения внешнего b и внутреннего a радиусов цилиндра $b / a = 10$ [1]. Введем следующие обозначения:

$$Y_{mn}\left(\alpha_k \cdot \frac{r}{a}, \alpha_k\right) = J_m(\alpha_k) \cdot Y_n\left(\alpha_k \cdot \frac{r}{a}\right) - J_n\left(\alpha_k \cdot \frac{r}{a}\right) \cdot Y_m(\alpha_k);$$

$$p1 = a \cdot (-1 + h) \cdot (1 + \nu); \quad p3 = r \cdot \alpha_k; \quad p4 = a^2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(1 - \nu^2\right) \cdot \rho;$$

$$p2 = \left((-1 + h) \cdot r + a \cdot (1 + \nu)\right); \quad p5 = \frac{4 \cdot \left(-9 + \dfrac{8}{\alpha_k^2}\right)}{9\pi^2} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{8}{9\alpha_k^2}\right),$$

где r – текущий радиус, м; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность среды, кг/м^3; J_m, J_n – функции Бесселя первого рода порядка m, n; Y_n, Y_m – функции Бесселя второго рода порядка m, n; $h = \nu / (1 - \nu)$.

Радиальное напряжение σ_r, с учетом принятых выше обозначений, определяем по формуле, составленной на основе работы [1]:

$$\sigma_r = \sum_{k=1}^{\infty}\left(4E \cdot F(t)\left(p1 \cdot Y_{11}\left(\alpha_k \cdot \frac{r}{a}, \alpha_k\right) + \alpha_k\left(p2 \cdot Y_{01}\left(\alpha_k \cdot \frac{r}{a}, \alpha_k\right) + \right.\right.\right.$$

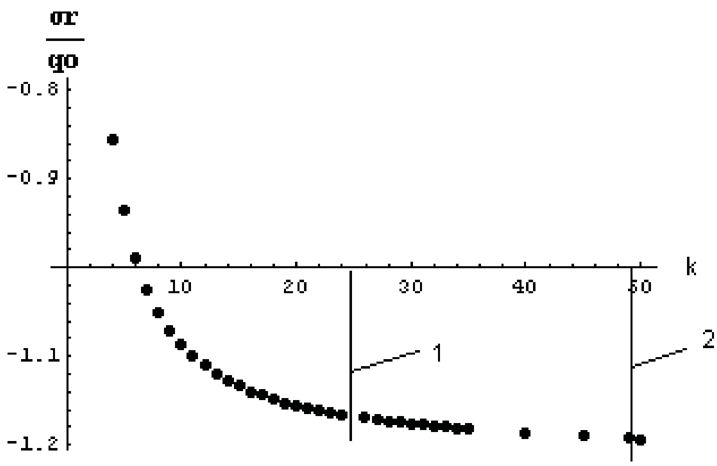
$$\left.\left.\left.\left. + p3 \cdot Y_{00}\left(\alpha_k \cdot \frac{r}{a}, \alpha_k\right)\right)\right)\right) \Big/ \left(p4\left(p5\left((-1 + h) \cdot Y_{11}\left(\alpha_k \cdot \frac{b}{a}, \alpha_k\right) + \alpha_k \cdot Y_{01}\left(\alpha_k \cdot \frac{b}{a}, \alpha_k\right)\right)^2\right)\Omega_k\right), \qquad \textbf{(1)}$$

где $F(t)$ – закон изменения внутренней нагрузки во времени, Па·с; α_k – корни трансцендентного уравнения [1]; E – модуль упругости, Па; $\Omega_k = \dfrac{\alpha_k}{a} \cdot \sqrt{\dfrac{3 \cdot E}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \rho}}$.

Метод решения. Выполним суммирование членов ряда по формуле (1) в различной комбинации сначала только до первой особой точки (точки разрыва). Суммируем, меняя порядковые номера членов ряда и объединяя члены ряда произвольным образом в отдельные группы. Знак членов ряда во время суммирования был все время постоянным. В результате выполнения этих математических процедур сумма ряда оставалась неизменной. Для того, чтобы проверить данный метод суммирования для цилиндров с соотношениями $b/a = 100$ и $b/a = 1000$, исключим из счета все особые точки, а суммирование оставшихся членов ряда проведем, группируя их по такой схеме: первую группу от $k = 1$ до $k = n1$, где $n1$ – порядковый номер корня трансцендентного уравнения перед первой особой точкой. Последующие группы членов ряда составляем из членов ряда между особыми точками. Суммирование каждой группы членов ряда осуществляем отдельно и независимо друг от друга, а затем сложим эти части друг с другом до получения устойчивого значения всей суммы ряда:

$$\sigma_r = \sum_{k=1}^{k=n1} \sigma_r + \sum_{k=n1+2}^{k=n2} \sigma_r + \ldots + \sum_{k=ni+2}^{k=nj} \sigma_r \,,$$

где $n1, n2, \ldots, nj$ – номера членов ряда перед особыми точками; $1, n1+2, \ldots, ni+2$ – номера членов ряда за особами точками. Результаты расчета по напряжениям приведены на рис. 1.



1 – первый разрыв, $k = 25$; 2 – второй разрыв, $k = 50$

Рисунок 1 - Характер изменения суммы ряда $\sigma_r / p0$ в зависимости от порядкового номера k корня трансцендентного уравнения для линейного участка нагружения при переходе точек разрыва суммы ряда

Из рис. 1 видно, что суммарная кривая состоит из двух кривых: первая является суммой ряда от $k = 1$ до $k = 24$ (до первой особой точки с порядковым номером $k = 25$), а вторая, добавочная, является плавным продолжением первой – результат комбинированного суммирования от $k = 26$ до $k = 49$.

 ISSN 1562-9945

На рис. 2 показаны кривые суммирования рядов на участке действия сил инерции для радиальных напряжений $\sigma_{r3} / p0$ в зависимости от времени сброса tc нагрузки с амплитудой, равной $p0$, при одинаковых исходных данных для трех различных моделей $b / a = 10$, $b / a = 100$ и $b / a = 1000$.

Из рис. 2 видно, что все три кривые изменения напряжений при отсутствии влияния отраженных волн для соответствующих моментов времени совпадают друг с другом.

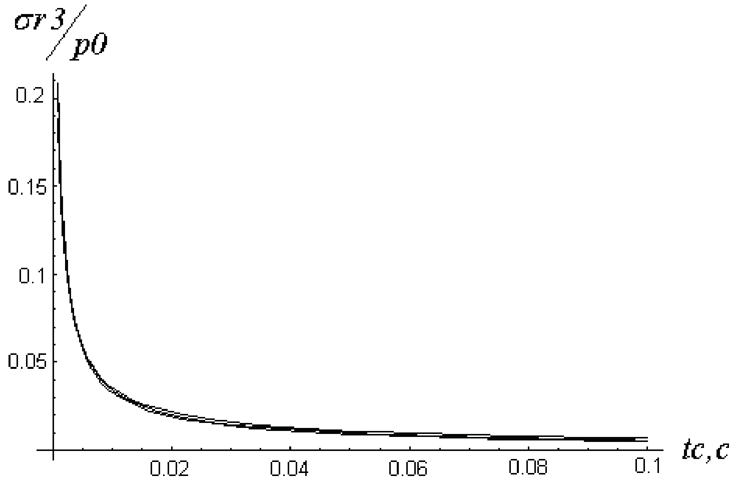


Рисунок 2 - Характер изменения радиальных напряжений $\sigma_{r3} / p0$ от падающей волны на участке действия сил инерции от времени сброса tc нагрузки для трех расчетных моделей

Выводы. Применяя к задаче А. Н. Крылова метод суммирования для знакопостоянных рядов, с предварительным исключением из счета особых точек второго рода, можно добиться устойчивого решения при определении перемещений и напряжений для цилиндров с большими внешними радиусами. Исключение из счета особых точек дает относительную погрешность вычисления, не превышающую 7–10 %. Достоверностью полученного решения является совпадение результатов расчета напряжений и перемещений для всех трех расчетных моделей на участке роста нагрузки перед ее сбросом с известным решением Ляме [3] и совпадение их на участке действия сил инерции для модели с размерами $b / a = 10$ [1] для малых времен сброса нагрузки, когда нет влияния отраженных волн. Численная реализация вычисления напряжений и перемещений по предлагаемой схеме проста и эффективна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах: учеб. пособие для вузов / А. Н. Крылов. – Л.: Академия наук СССР, 1950. – 369 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления; т. 2, издательство седьмое / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – 800 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

 ISSN 1562-9945