

Ю.А. Малая, А.И. Губин, А.И. Гуда

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ
КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ НА
КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫЕ ТЕЛА**

В статье построена математическая модель процессов теплопроводности при воздействии концентрированных потоков энергии на кусочно-однородные тела с учетом конечной скорости распространения тепла и температурной зависимости теплофизических и оптических характеристик. Предложен приближенный аналитический метод решения нелинейных краевых задач для системы гиперболических уравнений теплопроводности, сочетающий метод пространственно-временных квадратов и операционный метод.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, концентрированные потоки энергии.

Широкое применение различных методов нанесения защитных покрытий на металлические поверхности, наблюдаемое в последнее время, открыло новые возможности придания применяемым металлам и сплавам высоких, недостижимых ранее свойств, что обеспечивает возможность решения задач экономии металлов, восстановления изношенных поверхностей, продления срока службы машин и механизмов, создание новых, более совершенных конструкций машин, специальной техники, приборов.

Среди методов последующей обработки покрытий после нанесения ведущее место занимают методы обработки поверхности концентрированными потоками энергии, которые позволяют модифицировать поверхностные слои для достижения более высоких физико-механических свойств, стойкости против окисления и коррозии [1, 2, 4, 5].

Интенсификация процессов нагрева тел, а также широкий диапазон изменения температур приводят к необходимости учета ко-

нечной скорости распространения тепла и температурной зависимости теплофизических и оптических характеристик.

Целью работы является построение математической модели процессов теплопроводности при воздействии концентрированных потоков энергии на кусочно-однородные тела с учетом конечной скорости распространения тепла и зависимости теплофизических и оптических характеристик от температуры, а также разработка приближенного аналитического метода решения нелинейной краевой задачи для системы гиперболических уравнений теплопроводности.

Рассмотрим задачу о нагреве кусочно-однородного тела, состоящего из m слоев, концентрированным потоком энергии. Предположим, что радиус пятна нагрева намного больше глубины проникновения тепла, поэтому задача может быть рассмотрена в одномерном приближении. Теплофизические характеристики материалов слоев являются заданными функциями температуры. В системе известны начальное распределение температуры и начальная скорость изменения температуры. На внешних границах могут быть заданы температуры, тепловые потоки или условия конвективного теплообмена. На стыках слоев контакты считаются неидеальными. Времена релаксации тепловых потоков примем постоянными. Тогда математическая модель процессов теплопроводности при воздействии концентрированных потоков энергии будет состоять из дифференциальных уравнений теплопроводности гиперболического типа для каждого из слоев

$$\tau_{r,\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_\nu(T_\nu) \rho_\nu(T_\nu) \frac{\partial T_\nu(x,t)}{\partial t} \right) + c_\nu(T_\nu) \rho_\nu(T_\nu) \frac{\partial T_\nu(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_\nu(T_\nu) \frac{\partial T_\nu(x,t)}{\partial x} \right) + W_\nu(x,t,T_\nu) + \tau_{r,\nu} \frac{\partial W_\nu(x,t,T_\nu)}{\partial t}, \quad 0 < t < t_k, \quad S_{\nu-1} < x < S_\nu; \quad \nu = \overline{1, m}; \quad (1)$$

начальных условий:

$$T_\nu(x, 0) = \chi_{\nu,1}(x), \quad \left. \frac{\partial T_\nu(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi_{\nu,2}(x); \quad S_{\nu-1} \leq x \leq S_\nu, \\ \nu = \overline{1, m}; \quad (2)$$

условий на внешних границах:

$$-k_{11} \lambda_1(T_1) \left. \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x=S_0} = \left[f_1(t, T_1) - \eta_1(t, T_1) T_1(x,t) \right] \Big|_{x=S_0} +$$

$$+\tau_{r,1}k_{12} \frac{\partial}{\partial t} \left[f_1(t, T_1) - \eta_1(t, T_1) T_1(x, t) \right] \Big|_{x=S_0}, \quad (3)$$

$$-k_{21}\lambda_m(T_m) \frac{\partial T_m(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S_m} = \left[f_2(t, T_m) - \eta_2(t, T_m) T_m(x, t) \right] \Big|_{x=S_m} +$$

$$+\tau_{r,m}k_{22} \frac{\partial}{\partial t} \left[f_2(t, T_m) - \eta_2(t, T_m) T_m(x, t) \right] \Big|_{x=S_m}, \quad (4)$$

граничных условий на стыках слоев:

$$-R_\nu \cdot \lambda_\nu(T_\nu) \frac{\partial T_\nu(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S_\nu} = \left[T_{\nu+1}(S_\nu, t) - T_\nu(S_\nu, t) \right] +$$

$$+l_\nu \tau_{r,\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left[T_{\nu+1}(S_\nu, t) - T_\nu(S_\nu, t) \right]; \quad (5)$$

$$\lambda_\nu(T_\nu) \frac{\partial T_\nu(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S_\nu} + \tau_{r,\nu+1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_\nu(T_\nu) \frac{\partial T_\nu(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=S_\nu} =$$

$$= \lambda_{\nu+1}(T_{\nu+1}) \frac{\partial T_{\nu+1}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S_\nu} + \tau_{r,\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_{\nu+1}(T_{\nu+1}) \frac{\partial T_{\nu+1}(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=S_\nu}, \quad (6)$$

$$0 < t \leq t_k, \quad \nu = \overline{1, m-1},$$

где $T_\nu(x, t)$ – поля температур; $W_\nu(x, t, T)$ – мощности внутренних источников тепла; $\chi_{\nu,1}(x)$ – начальные распределения температуры; $\chi_{\nu,2}(x)$ – начальные распределения скорости изменения температуры; $\lambda_\nu(T_\nu)$ – коэффициенты теплопроводности; $c_\nu(T_\nu)$ – теплоемкости; $\rho_\nu(T_\nu)$ – плотности веществ; $\tau_{r,\nu}$ – времена релаксации теплового потока; ν – номер слоя; t – текущее время; x – пространственная координата; R_ν – термические сопротивления между слоями; $\eta_1(t, T_1)$, $\eta_2(t, T_m)$ – граничные функции, которые принимают значения 0 (граничные условия второго рода), 1 (граничные условия первого рода) или $\alpha_1(t, T_1)$, $\alpha_2(t, T_2)$ (граничные условия третьего рода); $f_1(t, T_1)$, $f_2(t, T_m)$ – граничные функции, которые в зависимости от типа граничных условий могут быть температурами внешних поверхностей (граничные условия первого рода), произведениями температур окружающих сред на коэффициенты теплоотдачи (граничные ус-

ловия третьего рода), тепловыми потоками на внешних границах (граничные условия второго рода).

Параметры k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} , принимающие значения 0 или 1, дают возможность получить граничные условия первого, второго и третьего рода. При $l_\nu = 0$, $R_\nu = 0$ получаем условия идеального теплового контакта между слоями, а при $l_\nu = 1$, $R_\nu \neq 0$ – условия неидеального теплового контакта.

Эффективным для решения нелинейных задач теплопроводности является совместное применение метода пространственно-временных квадрантов и операционного метода, что было показано в работе [3], где данный подход был применен для решения нелинейной краевой задачи теплопроводности для однородного тела на основе гиперболического уравнения. В данной работе развит метод пространственно-временных квадрантов для нелинейных краевых задач теплопроводности на основе уравнений гиперболического типа для кусочно-однородных тел.

Согласно предложенному методу каждый из прямоугольников $[S_{\nu-1}, S_\nu] \times [0, t_k]$ разбиваем двумя семействами параллельных прямых $x = x_i$, $i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu - 1}$ и $t = t_j$, $j = \overline{1, M - 1}$ на прямоугольники $[x_{i-1}, x_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, ($i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu}$, $j = \overline{1, M}$). Здесь $x_{i_\nu} = S_\nu$, $i_0 = 0$, $i_\nu = \sum_{m=1}^{\nu} N_m$, $N = i_m$, $\nu = \overline{1, m}$, N_ν – количество слоев на которые разбивается ν -ый слой.

В каждом из полученных прямоугольников соответствующее нелинейное уравнение из (1) заменяем линейным уравнением

$$\tau_{r,\nu} c_{ij} \rho_{ij} \frac{\partial^2 T_{ij}(x,t)}{\partial t^2} + c_{ij} \rho_{ij} \frac{\partial T_{ij}(x,t)}{\partial t} = \lambda_{ij} \frac{\partial^2 T_{ij}(x,t)}{\partial x^2} + W_{ij}(x,t) + \tau_{r,\nu} \frac{\partial W_{ij}(x,t)}{\partial t},$$

$$x_{i-1} < x < x_i, \quad t_{j-1} < t \leq t_j, \quad i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu}, \quad j = \overline{1, M}, \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (7)$$

В начальный момент времени выполняются условия:

$$T_{i1}(x,0) = \chi_{1,\nu}(x), \quad \left. \frac{\partial T_{i1}(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi_{2,\nu}(x) \quad (8)$$

при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu}$, $\nu = \overline{1, m}$.

На границах $x = S_0$ и $x = S_m$ выполняются линейные условия:

$$-k_{11}\lambda_{1j} \frac{\partial T_{1j}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_0} = [f_{1,j}(t) - \eta_{1,j}(t)T_{1j}(x,t)] \Big|_{x=S_0} + \tau_{r,1}k_{12} \frac{d}{dt} [f_{1,j}(t) - \eta_{1,j}(t)T_{1j}(x,t)] \Big|_{x=S_0}, \quad (9)$$

$$-k_{21}\lambda_{Nj} \frac{\partial T_{Nj}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_m} = [f_{2,j}(t) - \eta_{2,j}(t)T_{Nj}(x,t)] \Big|_{x=S_m} + \tau_{r,m}k_{22} \frac{d}{dt} [f_{2,j}(t) - \eta_{2,j}(t)T_{Nj}(x,t)] \Big|_{x=S_m} \quad (10)$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = \overline{1, M}$.

На границах $x = S_\nu$, $\nu = \overline{1, m-1}$ выполняются линейные условия неидеального теплового контакта

$$-R_\nu \cdot \lambda_{i_\nu, j} \frac{\partial T_{i_\nu, j}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_\nu} = [T_{i_\nu+1, j}(S_\nu, t) - T_{i_\nu, j}(S_\nu, t)] + l_\nu \tau_{r, \nu} \frac{d}{dt} [T_{i_\nu+1, j}(S_\nu, t) - T_{i_\nu, j}(S_\nu, t)]; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{i_\nu, j} \frac{\partial T_{i_\nu, j}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_\nu} + \tau_{r, \nu+1} \lambda_{i_\nu, j} \frac{\partial^2 T_{i_\nu, j}(x,t)}{\partial t \partial x} \Big|_{x=S_\nu} = \\ & = \lambda_{i_\nu+1, j} \frac{\partial T_{i_\nu+1, j}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=S_\nu} + \tau_{r, \nu} \lambda_{i_\nu+1, j} \frac{\partial^2 T_{i_\nu+1, j}(x,t)}{\partial t \partial x} \Big|_{x=S_\nu} + \\ & + \left[\tau_{r, \nu} \frac{d\lambda_{\nu+1}}{dT_{\nu+1}} \Big|_{T_{\nu+1}=T_{i_\nu+1, j}} \frac{\partial T_{i_\nu+1, j}}{\partial t} \frac{\partial T_{i_\nu+1, j}}{\partial x} - \tau_{r, \nu+1} \frac{d\lambda_\nu}{dT_\nu} \Big|_{T_\nu=T_{i_\nu, j}} \frac{\partial T_{i_\nu, j}}{\partial t} \frac{\partial T_{i_\nu, j}}{\partial x} \right] \Big|_{x=S_\nu, t=t_{j-1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = \overline{1, M}$.

На сторонах прямоугольников, принадлежащих прямым $x = x_i$ ($i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu - 1}$, $\nu = \overline{1, m}$) выполняются условия идеального теплового контакта:

$$T_{i+1, j}(x_i, t) = T_{ij}(x_i, t), \quad \lambda_{i+1, j} \frac{\partial T_{i+1, j}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \lambda_{ij} \frac{\partial T_{ij}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_i}, \quad (13)$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = \overline{1, M}$.

На сторонах прямоугольников, принадлежащих прямым $t = t_j$ ($j = \overline{1, M-1}$), выполняются условия:

$$T_{i,j+1}(x, t_j) = T_{ij}(x, t_j), \left. \frac{\partial T_{i,j+1}(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \left. \frac{\partial T_{ij}(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j}, \quad (14)$$

при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = \overline{1, N}$.

Коэффициенты уравнения (7) можно определить следующим образом:

$$c_{ij} = c_\nu \left(T_{ij} \left(x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, t_{j-1} \right) \right); \quad \lambda_{ij} = \lambda_\nu \left(T_{ij} \left(x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, t_{j-1} \right) \right);$$

$$\rho_{ij} = \rho_\nu \left(T_{ij} \left(x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, t_{j-1} \right) \right);$$

$$W_{ij}(x, t) = W_\nu \left(x, t, T_{ij} \left(x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, t_{j-1} \right) \right) + Q_{ij}(x, t),$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu}$, $j = \overline{1, M}$, $\nu = \overline{1, m}$,

$$Q_{ij}(x, t) = \left[\frac{d\lambda_\nu}{dT_\nu} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \right)^2 - \tau_{r,\nu} \frac{d(c_\nu \cdot \rho_\nu)}{dT_\nu} \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \right)^2 + \tau_{r,\nu} \frac{\partial W_\nu}{\partial T_\nu} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \right] \Bigg|_{x=x_i - \frac{\Delta x_i}{2}, t=t_{j-1}}.$$

Функции, которые входят в граничные условия (9) и (10), определяются как:

$$f_{1,j}(t) = f_1(t, T_{1j}(S_0, t_{j-1})) + F_{1,j}, \quad f_{2,j}(t) = f_2(t, T_{N,j}(S_m, t_{j-1})) + F_{2,j},$$

$$\eta_{1,j}(t) = \eta_1(t, T_{1j}(S_0, t_{j-1})), \quad \eta_{2,j}(t) = \eta_2(t, T_{N,j}(S_m, t_{j-1})),$$

$$F_{1,j} = \tau_{r,1} k_{12} \left[\frac{\partial T_{1j}}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial f_1}{\partial T_1} \right|_{T_1=T_{1j}} - \left. \frac{\partial \eta_1}{\partial T_1} \right|_{T_1=T_{1j}} \cdot T_{1j}(x, t) \right) \right] \Bigg|_{x=S_0, t=t_{j-1}},$$

$$F_{2,j} = \tau_{r,2} k_{22} \left[\frac{\partial T_{2j}}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial f_2}{\partial T_2} \right|_{T_2=T_{2j}} - \left. \frac{\partial \eta_2}{\partial T_2} \right|_{T_2=T_{2j}} \cdot T_{2j}(x, t) \right) \right] \Bigg|_{x=S_m, t=t_{j-1}}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Таким образом, на каждом промежутке по времени $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ получаем линейную задачу теплопроводности для кусочно-однородного тела, причем эти задачи необходимо решать последова-

тельно от 1-го до M -го промежутка. Аналитические решения таких задач могут быть получены операционным методом, что показано в работах [4-6].

Для удобства решения задачи (7) – (12) операционным методом в каждом прямоугольнике $[x_{i-1}, x_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ введем локальную систему координат и безразмерные переменные:

$$z_i = \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x_i}, \quad 0 \leq z_i \leq 1, \quad Fo_{ij} = \frac{(t - t_{j-1}) \cdot a_{ij}}{\Delta x_i^2}, \quad 0 \leq Fo_{ij} \leq \Delta Fo_{ij},$$

$\Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij}) = \frac{T_{ij}(x, t)}{T_h}$, где z_i – безразмерная пространственная координата; Fo_{ij} – безразмерное время; $\Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij})$ – безразмерная температура; T_h – некоторая характерная для исследуемого процесса температура; $\Delta Fo_{ij} = \frac{\Delta t_j \cdot a_{ij}}{\Delta x_i^2}$ – конечное безразмерное время; $\Delta t_j = t_{j-1} - t_j$;

$a_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{c_{ij} \rho_{ij}}$ – коэффициент температуропроводности.

Тогда задача (7) – (10) примет вид:

$$Fo_{r,ij} \frac{\partial^2 \Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij})}{\partial Fo_{ij}^2} + \frac{\partial \Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij})}{\partial Fo_{ij}} = \frac{\partial^2 \Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij})}{\partial z_i^2} + Os_{ij}(z_i, Fo_{ij}) + Fo_{r,ij} \frac{\partial Os_{ij}(z_i, Fo_{ij})}{\partial Fo_{ij}}, \quad 0 < z_i < 1, \quad 0 < Fo_{ij} \leq \Delta Fo_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}; \tag{15}$$

$$\Theta_{i1}(z_i, 0) = \vartheta_{1,i}(z_i), \quad \left. \frac{\partial \Theta_{i1}(z_i, Fo_{i1})}{\partial Fo_{i1}} \right|_{Fo_{i1}=0} = \vartheta_{2,i}(z_i), \quad 0 \leq z_i \leq 1, \quad i = \overline{1, N} \tag{16}$$

$$-k_{11} \left. \frac{\partial \Theta_{1j}(z_1, Fo_{1j})}{\partial z_1} \right|_{z_1=0} = \left[\Phi_{1,j}(Fo_{1j}) - Bi_{1,j}(Fo_{1j}) \Theta_{1,j}(z_1, Fo_{1j}) \right]_{z_1=0} + Fo_{r,1j} k_{12} \frac{d}{dFo_{1j}} \left[\Phi_{1,j}(Fo_{1j}) - Bi_{1,j}(Fo_{1j}) \Theta_{1,j}(z_1, Fo_{1j}) \right]_{z_1=0}, \tag{17}$$

$$0 < Fo_{1j} \leq \Delta Fo_{1j}, \quad j = \overline{1, M};$$

$$-k_{21} \frac{\partial \Theta_{Nj}(z_N, Fo_{Nj})}{\partial z_N} \Big|_{z_N=1} = \left[\Phi_{2,j}(Fo_{Nj}) - Bi_{2,j}(Fo_{Nj}) \Theta_{Nj}(z_N, Fo_{Nj}) \right] \Big|_{z_N=1} +$$

$$+ Fo_{r,Nj} k_{22} \frac{d}{dFo_{Nj}} \left[\Phi_{2,j}(Fo_{Nj}) - Bi_{2,j}(Fo_{Nj}) \Theta_{Nj}(z_N, Fo_{Nj}) \right] \Big|_{z_N=1}, \quad (18)$$

$$0 < Fo_{Nj} \leq \Delta Fo_{Nj}, \quad j = \overline{1, M};$$

$$-R_{\nu,j}^* \cdot \frac{\partial \Theta_{i_\nu,j}(z_{i_\nu}, Fo_{i_\nu,j})}{\partial z_{i_\nu}} \Big|_{z_{i_\nu}=1} = \left[\Theta_{i_\nu+1,j}(0, Fo_{i_\nu+1,j}) - \Theta_{i_\nu,j}(1, Fo_{i_\nu,j}) \right] +$$

$$+ l_\nu Fo_{r,i_\nu,j} \frac{d}{dFo_{i_\nu,j}} \left[\Theta_{i_\nu+1,j}(0, Fo_{i_\nu+1,j}) - \Theta_{i_\nu,j}(1, Fo_{i_\nu,j}) \right]; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Theta_{i_\nu+1,j}(z_{i_\nu+1}, Fo_{i_\nu+1,j})}{\partial z_{i_\nu+1}} \Big|_{z_{i_\nu+1}=0} + Fo_{r,i_\nu,j} \cdot \sigma_{i_\nu+1,i_\nu,j} \cdot \frac{\partial^2 \Theta_{i_\nu+1,j}(z_{i_\nu+1}, Fo_{i_\nu+1,j})}{\partial Fo_{i_\nu+1,j} \partial z_{i_\nu+1}} \Big|_{z_{i_\nu+1}=0} =$$

$$= \beta_{i_\nu,j} \cdot \frac{\partial \Theta_{i_\nu,j}(z_{i_\nu}, Fo_{i_\nu,j})}{\partial z_{i_\nu}} \Big|_{z_{i_\nu}=1} + Fo_{r,i_\nu+1,j} \cdot \sigma_{i_\nu,i_\nu+1,j} \cdot \beta_{i_\nu,j} \cdot \frac{\partial^2 \Theta_{i_\nu,j}(z_{i_\nu}, Fo_{i_\nu,j})}{\partial Fo_{i_\nu,j} \partial z_{i_\nu}} \Big|_{z_{i_\nu}=1} \quad (20)$$

$$0 < Fo_{i_\nu,j} \leq \Delta Fo_{i_\nu,j}, \quad Fo_{i_\nu+1,j} = \sigma_{i_\nu+1,i_\nu,j} Fo_{i_\nu,j}, \quad i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu - 1}, \quad \nu = \overline{1, k-1},$$

$$j = \overline{1, M}.$$

$$\Theta_{i+1,j}(0, Fo_{i+1,j}) = \Theta_{ij}(1, Fo_{ij}), \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Theta_{i+1,j}(z_{i+1}, Fo_{i+1,j})}{\partial z_{i+1}} \Big|_{z_{i+1}=0} = \beta_{ij} \frac{\partial \Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij})}{\partial z_i} \Big|_{z_i=1}, \quad (22)$$

$$0 < Fo_{ij} \leq \Delta Fo_{ij}, \quad Fo_{i+1,j} = \sigma_{i+1,i,j} \cdot Fo_{ij}, \quad j = \overline{1, M}, \quad i = \overline{i_{\nu-1} + 1, i_\nu - 1}, \quad \nu = \overline{1, k};$$

$$\Theta_{i,j+1}(z_i, 0) = \Theta_{ij}(z_i, \Delta Fo_{ij}), \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Theta_{i,j+1}(z_i, Fo_{i,j+1})}{\partial Fo_{i,j+1}} \Big|_{Fo_{i,j+1}=0} = \xi_{ij} \cdot \frac{\partial \Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij})}{\partial Fo_{ij}} \Big|_{Fo_{ij}=\Delta Fo_{ij}}, \quad (24)$$

$$0 \leq z_i \leq 1; \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M-1};$$

где $Fo_{r,ij} = \frac{\tau_{r,\nu} \cdot a_{ij}}{\Delta x_i^2}, \quad Os_{ij}(z_i, Fo_{ij}) = \frac{W_{ij}(x, t) \cdot \Delta x_i^2}{T_h \cdot \lambda_{ij}}, \quad R_{\nu,j}^* = \frac{\lambda_{i_\nu,j} \cdot R_\nu}{\Delta x_{i_\nu}},$

$$\vartheta_{1,i}(z_i) = \frac{\chi_{1,i}(x)}{T_h}, \quad \vartheta_{2,i}(z_i) = \frac{\chi_{2,i}(x) \cdot \Delta x_i^2}{T_h \cdot a_{ij}}, \quad \Phi_{1,j}(Fo_{1j}) = \frac{f_{1,j}(t) \cdot \Delta x_1}{T_h \cdot \lambda_{1j}},$$

$$\Phi_{2,j}(Fo_{Nj}) = \frac{f_{2,j}(t) \cdot \Delta x_N}{T_h \cdot \lambda_{Nj}}, \quad Bi_{1,j}(Fo_{1j}) = \frac{\eta_{1,j}(t) \cdot \Delta x_1}{\lambda_{1j}}, \quad \xi_{ij} = \frac{a_{i,j+1}}{a_{ij}},$$

$$Bi_{2,j}(Fo_{Nj}) = \frac{\eta_{2,j}(t) \cdot \Delta x_N}{\lambda_{Nj}}, \quad Fo_{ij} = \sigma_{ikj} \cdot Fo_{kj}, \quad \sigma_{ikj} = \frac{a_{ij} \cdot \Delta x_k^2}{a_{kj} \cdot \Delta x_i^2}, \quad \beta_{ij} = \frac{\Delta x_{i+1} \cdot \lambda_{i,j}}{\Delta x_i \cdot \lambda_{i+1,j}}.$$

Решая задачу (15) – (20) при каждом фиксированном j от 1 до M операционным методом в каждом из прямоугольников $[x_{i-1}, x_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ температурное поле получим в виде [4, 5, 7]

$$\Theta_{ij}(z_i, Fo_{ij}) = \sum_{r=1}^{2N} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_{n,i} [\mu_{n,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij}), \phi_{n,ij}] \cdot g_{r,j}^{(n)}(Fo_{ij}, Fo_{r,ij}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{r,i}(P_k)}{\Psi_N(\phi_{n,i}, P_k)} Q_i [\mu_{n,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij}), P_k] \exp(-\gamma_k^2 \cdot Fo_{ij}) \right\} + Z_{ij}^*(z_i, Fo_{ij}, Fo_{r,ij}), \quad (25)$$

где

$$\Omega_{n,ij} [\mu_{n,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij}), \phi_{n,ij}] = \frac{\mu_{n,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij})}{\phi_{0,ij}} - \sum_{l=1}^n \Omega_{n-l,ij} [\mu_{n-l,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij}), \phi_{n-l,ij}] \frac{\phi_{l,ij}}{\phi_{0,ij}};$$

$$Q_{ij} [\mu_{n,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij}), P_k] = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n,r,ij}(z_i, Fo_{r,ij}) \cdot P_k^n; \quad \Psi_{ij}(\phi_{n,ij}, P_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n,ij} P_k^n;$$

$Z_{ij}^*(z_i, Fo_{ij}, Fo_{r,ij})$ – частное решение неоднородного уравнения (15).

На рис. 1 приведены кривые зависимости температуры в двух-слойном теле от времени, которые получены на основе предложенного метода при следующих исходных данных:

$$W_\nu(x, t, T_\nu) = 0, \quad \chi_{\nu,1}(x) = T_0, \quad \chi_{\nu,2}(x) = 0, \quad \nu = 1, 2, \quad k_{11} = k_{12} = 1, \\ k_{21} = 1, \quad k_{22} = 0, \quad \eta_1(t, T_1) = \eta_2(t, T_2) = 0, \quad f_1(t, T_1) = A_1(T_1) q_0(t), \\ f_2(t, T_2) = 0, \quad R_1 = 0, \quad l_1 = 0, \quad q_0(t) = q_{\max} \sin \frac{\pi t}{t_\kappa}, \quad T_0 = 300^\circ \text{C}, \\ q_{\max} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Вт/м}^2, \quad S_0 = 0, \quad S_1 = 0,025 \text{ мм}, \quad S_2 = 0,1 \text{ мм}, \quad t_\kappa = 5 \text{ мкс}, \\ A_1(T_1) \text{ – поглощательная способность молибдена, материал первого} \\ \text{слоя } (\nu = 1) \text{ – молибден, материал второго слоя } (\nu = 2) \text{ – сталь.}$$

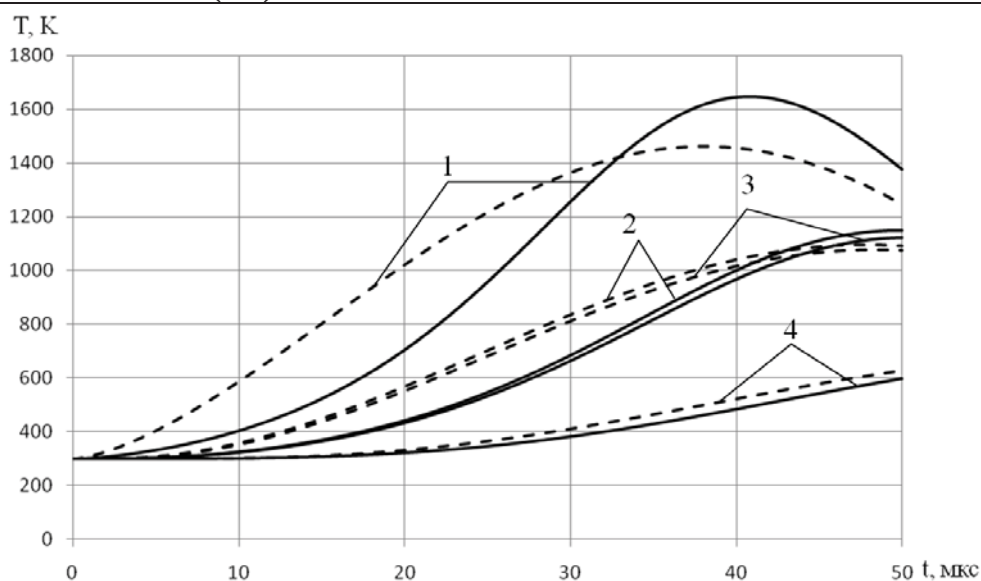


Рисунок 1 - Изменение температуры во времени: 1 – при $x = 0$; 2 – при $x = 0,025$ мм; 3 – при $x = 0,0255$ мм; 4 – при $x = 0,04$ мм

На рис. 1 сплошные линии – решение нелинейной задачи, а штриховые – решение соответствующей линейной задачи.

Существенное различие температур, полученных на основе предложенной нелинейной математической модели и соответствующей ей линейной модели, указывает на необходимость учета зависимости теплофизических и оптических характеристик материалов от температуры при моделировании нагрева кусочно-однородных тел концентрированными потоками энергии.

Построенная математическая модель процессов теплопроводности при воздействии концентрированных потоков энергии на кусочно-однородные тела с учетом конечной скорости распространения тепла и температурной зависимости теплофизических и оптических характеристик, а также предложенный приближенный аналитический метод решения нелинейных краевых задач для систем гиперболических уравнений теплопроводности, сочетающий метод пространственно-временных квадрантов и операционный метод, могут быть использованы для исследования тепловых процессов и выбора оптимальных режимов обработки покрытий концентрированными потоками энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черненко В.С. Променеві методи обробки: Навчальний посібник / В.С. Черненко, М.В. Кіндрачук, О.І. Дудка. – К.: Кондор, 2008. – 166с.
2. Рыкалин Н. Н. Лазерная обработка материалов / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, А. Н. Кокора. – М.: Машиностроение, 1975. – 296с.
3. Губин А.И. Математическое моделирование тепловых процессов при лазерной обработке материалов на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности / А.И. Губин, Ю.А. Малая // Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика: збірник наукових праць. – Випуск 3. – Дніпропетровськ: Нова ідеологія, 2011. – С. 72 – 85.
4. Мала Ю. А. Математичне моделювання теплових процесів поверхневого зміцнення двошарових елементів конструкцій / Ю. А. Мала // Системні технології. – Т. 2(67). – Дніпропетровськ, 2010. – С. 60 – 66.
5. Мала Ю. А. Поверхневе зміцнення металів висококонцентрованими потоками енергії / Ю. А. Мала // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – Вип. 3(25), Т. 2. – ПолтНТУ, 2009. – С. 131 – 136.
6. Веселовский В. Б. Математическое моделирование тепловых процессов при поверхностном упрочнении элементов конструкций / В. Б. Веселовский, Ю. А. Малая, А. И. Губин, В. И. Ляшенко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: «Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – №5. – С. 121 – 128.
7. Веселовский В. Б. Математическое моделирование импульсных теплотехнологических процессов / В. Б. Веселовский, Ю. А. Малая, К. И. Гнедаш // Металлургическая теплотехника. – Днепропетровск: «ПП Грек О.С.», 2007. – С. 53 – 61.