УДК 620.179

В.П. Малайчук, А.И. Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СУММАРНО-РАЗНОСТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Аннотация. При неразрушающим контроле линейно-протяженных объектов (трубы, рельсы, колёса, сварные швы) и мониторинге технологических процессов производства измеряемые параметры их качества по своей физической природе являются случайными, автокоррелированными выборками и зависят от координат точек или времени измерения. Рассмотрена задача математического описания их суммарно-разностных преобразований, содержащих информацию об изменениях контролируемых или наблюдаемых параметров.

Ключевые слова: марковский процесс, гамма-последовательность, автокорреляция.

Постановка задачи

В задачах неразрушающего контроля и мониторинга технологических процессов и линейно-протяженных объектов скорость изменения их состояния и качества является одним из информативных параметров. Если для измерения непрерывных случайных процессов применяются аналогово-цифровые преобразователи, то выходные сигналы представляют собой дискретные временные ряды. Для их математического описания чаще всего используются последовательности вида

$$S(k) = \alpha S(k-1) + \beta\xi(k), \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

где $\xi(k)$ - формирующая последовательность независимых случайных величин с известным законом распределения вероятностей, α - коэффициент, характеризующий автокорреляционные свойства последовательности, β - энергетический показатель, зависящий от дисперсии последовательности D.

Суммарно-разностные преобразования – это последовательности их средних значений и разностей вида

$$y_1(i) = \frac{1}{2}\left[S(2i) + S(2i-1)\right], \quad y_2(i) = S(2i) - S(2i-1). \tag{2}$$

Последовательность $y_2(i)$, $i = 1, 2, \ldots, 0.5n$ характеризует скорость измерения временного ряда $S(k)$. Ставится задача определения статистических закономерностей суммарно-разностных преобразований (2) для двух видов последовательностей (1) с нормальным $\xi(k)$ и экспоненциальным $U(k)$ распределениями.

Параметры статистических закономерностей суммарно-разностных преобразований

Так как $y_1(i-1)$ равно $y_1(i-1) = \frac{1}{2}\left[S(2i-2) + S(2i-3)\right]$, то по аналогии с (1) суммарно-разностные преобразования описываются разностными уравнениями

$$y_1(i) = A_1 y_1(i-1) + B_1\left[\xi(2i) + \xi(2i-1)\right],$$

$$y_2(i) = A_2 y_2(i-1) + B_2\left[\xi(2i) - \xi(2i-1)\right], \tag{3}$$

где последовательности $z_1(i) = \xi(2i) + \xi(2i-1)$ и $z_2(i) = \xi(2i) - \xi(2i-1)$ - независимые нормальные случайные величины с нулевым математическим ожидание и дисперсией $D\left[z_1(i)\right] = D\left[z_2(i)\right] = 2$.

Если формирующие последовательности $\xi(k) = U(k)$ с экспоненциальным законом распределения, то $z_1(i) = U(2i) + U(2i-1)$ и $z_2(i) = U(2i) - U(2i-1)$, их математические ожидания и дисперсии равны $M\left[z_1(i)\right] = 2$, $M\left[z_2(i)\right] = 0$, $D\left[z_1(i)\right] = D\left[z_2(i)\right] = 2$, а законы распределения вероятностей соответственно Эрланга и Лапласа

$$W(z_1) = z_1 \exp\left(-z_1\right), \; W(z_2) = \frac{1}{2}\exp\left(-\left|z_2\right|\right). \tag{4}$$

Определим математические ожидания, дисперсии и функции автокорреляции последовательностей $y_1(i)$ и $y_2(i)$. В стационарном режиме ($k >> 1$) математические ожидания $M\left[y_1\right]$ и $M\left[y_2\right]$ равны нулю для гауссовых и для разностных гамма-последовательностей, а для суммарных зависят от параметров D и α

$$M\left[y_1\right] = M\left[S\right] = \frac{\beta}{1-\alpha} = \sqrt{\frac{D(1+\alpha)}{1-\alpha}}. \tag{5}$$

Дисперсии преобразований $y_1(i)$ и $y_2(i)$ равны

$$D\left[y_1\right] = \frac{D}{2}(1+\alpha), \; D\left[y_2\right] = 2D(1-\alpha). \tag{6}$$

ISSN 1562-9945

Из (2) следует, что суммарные $y_1(i)$ и разностные $y_2(i)$ последовательности взаимно не коррелированные, так как $M\left[y_1(i)y_2(i)\right]=0$. Определим их автокорреляционные функции как математические ожидания центрированных рядов. В результате получим

$$R_1(j)=\frac{D}{2}\alpha^{2j}(1+\alpha),$$

$$R_2(j)=2D\alpha^{2j}(1-\alpha). \tag{7}$$

Нормированные функции автокорреляции запишутся в виде

$$r_y(i)=\alpha^{2j},\ A=r_y(1)=\alpha^2 \tag{8}$$

и, соответственно для B_1 и B_2 получим формулы

$$B_1=\frac{\sqrt{D}}{2}\sqrt{(1+\alpha)(1-\alpha^4)},\ B_2=\sqrt{D(1-\alpha)(1-\alpha^4)}. \tag{9}$$

Законы распределения вероятностей суммарно-разностных преобразований

Решение уравнения (1) запишется в виде

$$S(k)=\beta\sum_{i=1}^{k}\alpha^{i-1}\xi(i)\ \text{или}\ S(k)=\beta\sum_{i=1}^{k}\alpha^{i-1}U(i). \tag{10}$$

Если $\xi(i)$ - последовательность независимых гауссовых случайных величин, то закон распределения $S(k)$ нормальный, следовательно, нормальные законы будут у последовательностей $y_1(i)$ и $y_2(i)$.

Взвешенная сумма (10) независимых случайных величин с экспоненциальным законом распределения имеет гамма-распределение

$$W(S)=\frac{S^{\gamma-1}}{\lambda^{\gamma}\Gamma(\gamma)}\exp\left(-\frac{S}{\lambda}\right). \tag{11}$$

Так как математическое ожидание и дисперсия гамма-поcделовательностей равны

$$M[S]=\sqrt{\frac{D(1+\alpha)}{(1-\alpha)}},\ D[S]=D,$$

то параметры закона (11) запишутся в виде

$$\lambda=\sqrt{D},\ \gamma=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \tag{12}$$

Для гамма-последовательностей решения уравнений (3) запишутся как взвешенные суммы

$$y_1(i) = B_1 \sum_{k=1}^{i} A_1^{k-1} z_1(k)\,,\ y_2(i) = B_2 \sum_{k=1}^{i} A_2^{k-1} z_2(k)\,, \tag{13}$$

где $z_1(k)$ и $z_2(k)$ - последовательность независимых случайных величин с распределением (4).

Из (12) следует, что если $z_1(k)$ и $z_2(k)$ нормальные случайные величины, то $y_1(i)$ и $y_2(i)$ - автокоррелированные марковские последовательности. Если $z_1(k)$ имеет распределение Эрланга (4), то $y_1(i)$ - автокоррелированная гамма-последовательность и если $z_2(k)$ имеет распределение Лапласа, то $y_2(i)$ - автокоррелированные последовательности с распределением Лапласа.

$$W\left(y_1\right) = \frac{y_1^{\gamma_1 - 1}}{\lambda_1^{\gamma_1} \Gamma(\gamma_1)} \exp\left(-\frac{y_1}{\lambda_1}\right),\ W\left(y_2\right) = \frac{1}{2\lambda_2} \exp\left(-\frac{|y_2|}{\lambda_2}\right). \tag{14}$$

Их параметры

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{D}}{2}\sqrt{1-\alpha^2}\,,\ \gamma_1 = \frac{2}{1-\alpha}\,,\ \ \lambda_2 = \sqrt{D(1-\alpha)}\,. \tag{15}$$

Компьютерная модель суммарно-разностных преобразований и вычислительные эксперименты

Используя генератор экспоненциальных случайных величин с параметром $\lambda = 1$, нормальных случайных величин с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$ и разностное уравнение (1), моделировались выборки $S(1), S(2), \ldots, S(k), \ldots, S(n)$. Эти выборки описываются марковской последовательностью с законом распределения вероятностей Гаусса или гамма. Проводились их суммарно-разностные преобразования, статистический анализ, оценивались параметры и законы распределения вероятностей. Для последовательностей Маркова с нормальным законом распределения вероятностей суммарно-разностные преобразования также описываются нормальным распределением, что подтверждено проверкой по критерию хи-квадрат. Марковская последовательность с гамма-распределением после суммарно-разностного преобразования имеет законы распределения вероятностей Эрланга (для суммы) и Лапласа (для разности). На рисунке 1 представлены гистограммы стационарных участков суммарного и разностного преобразования марковской гамма-последовательности. С параметрами $\lambda_1 = 0{,}3$, $\gamma_1 = 10$, $\lambda_2 = 0{,}447$ (при $D = 1$, $\alpha = 0{,}8$).

 ISSN 1562-9945

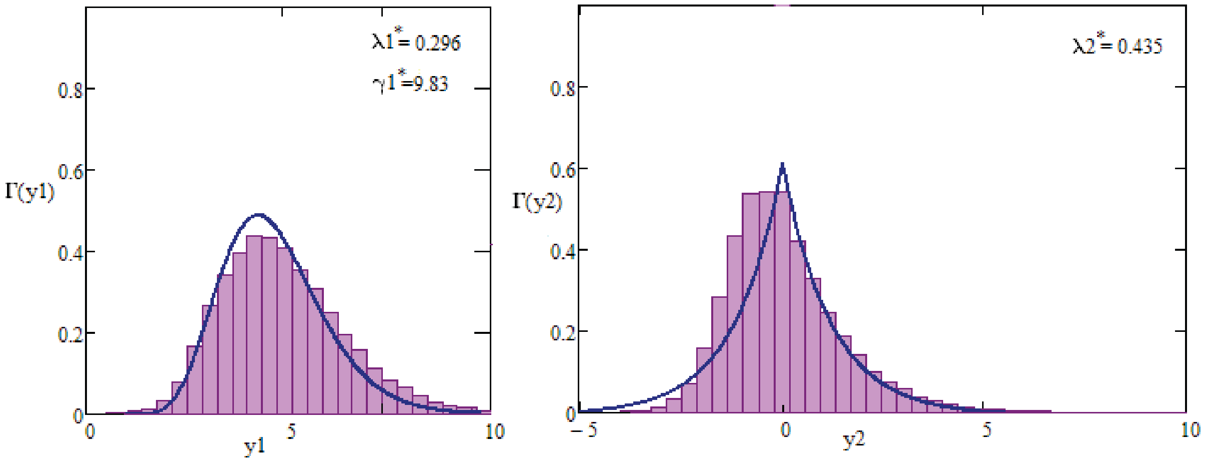

Рисунок 1 – Гистограммы стационарных участков $y1, y2$.

Проверка гипотезы о видах законов распределения вероятностей проводилась по критерию хи-квадрат. Статистика критерия $z_0 = 55,335$, при $P = 0,97$. Показатели критерия $z_1 = 50,329$ и $z_2 = 49,218$, то есть в каждом случае выполняется неравенство $z < z_0$, и гипотеза о виде закона распределения вероятностей подтверждается.

На рис. 2 представлены фрагменты стационарных участков марковской последовательности с нормальным (2а) (параметры $\alpha = 0.8, D = 1$) и гамма (2б) (параметры $\alpha = 0.8, D = 1$) законами распределения вероятностей.

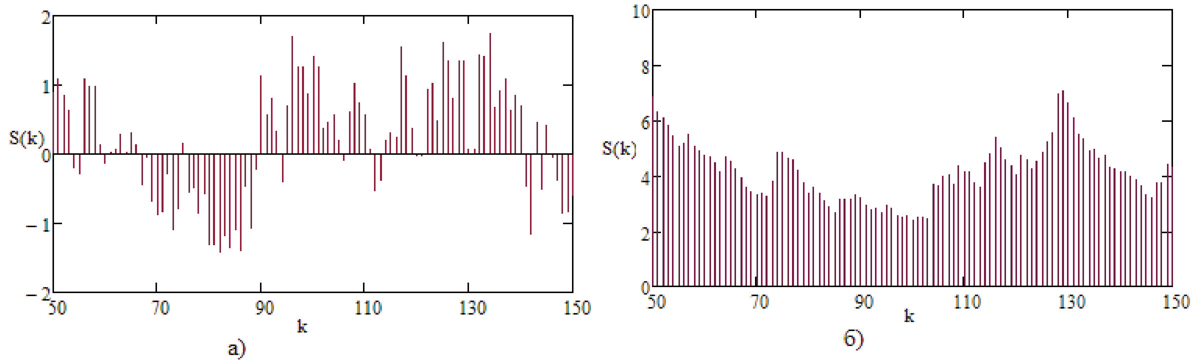

Рисунок 2 – Фрагмент марковской последовательности

Суммарно-разносные преобразования представлены на рис. 3.

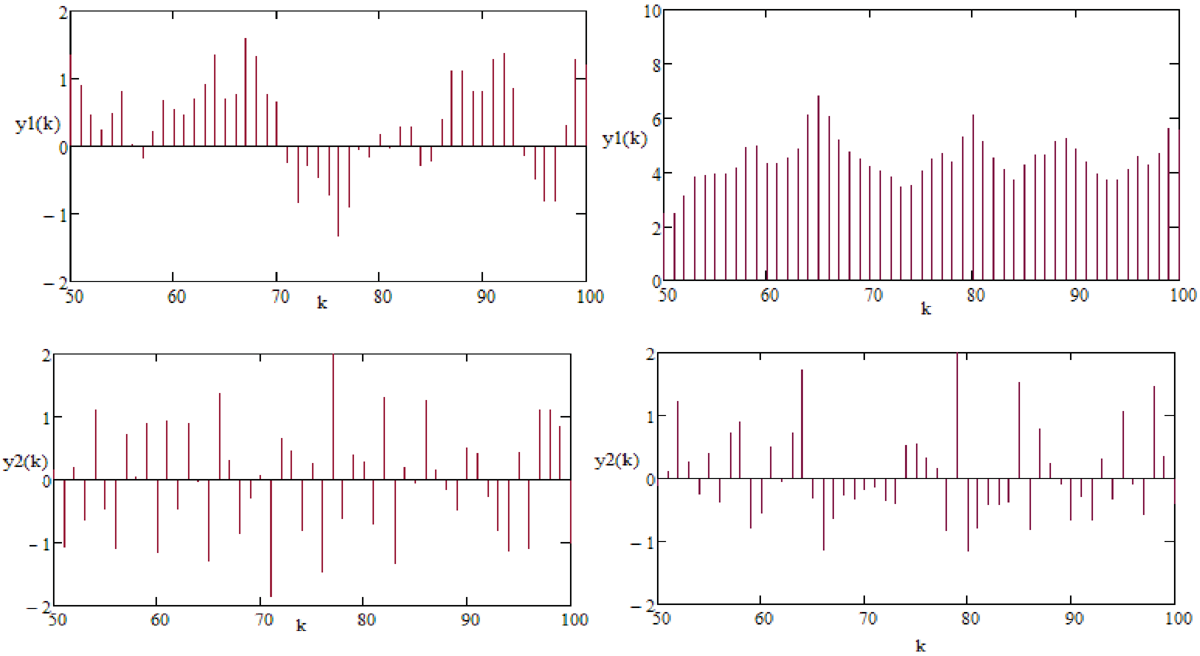

Рисунок 3 – Суммарно-разностные преобразования последовательности Маркова

Сформированные марковские последовательности имеют различные законы распределения вероятностей, но при этом их корреляционные свойства не изменяются. На рис. 4 показана корреляционная функция для двух рассмотренных случаев. При значениях параметра $\alpha = 0,7; 0,9$ и $\alpha^2 = 0,49; 0,81$.

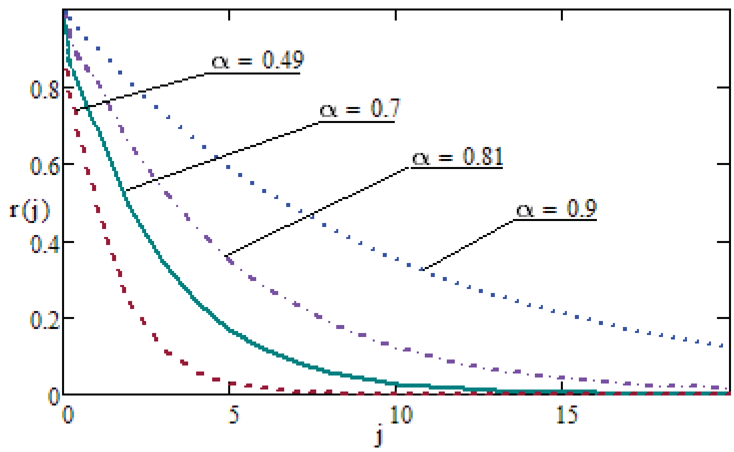

Рисунок 4 – Корреляционная функция

 ISSN 1562-9945

Выводы

1. Проведен статистический анализ суммарно-разностных преобразований марковских последовательностей. Установлено, что для гауссовых распределений закон распределения суммарно-разностных преобразований не изменяется, тогда как для гамма-последовательностей вид законов не изменяется только для суммарных преобразований, а разностные преобразования описываются законом распределения Лапласа.

2. Для различных законов марковских последовательностей корреляционной функции не зависят от вида закона распределения и вида преобразования, изменяется только их параметр α на α^2.

3. Результаты теоретического анализа подтверждены вычислительными экспериментами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика/ А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2006. – 816 с.
2. Малайчук В.П., Мозговой А.В. Математическая дефектоскопия: Монография.–Днепропетровск: Системные технологии,2005,-180 с.
3. Малайчук В.П., Федорович А.И. Математическое моделирование марковских гамма-последовательностей// Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 6 (77) - Днепропетровск, 2011.- с.198-205.