УДК 681.51

В.Г. Зайцев

ПРИМЕНЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрены понятия и вопросы, связанные с использованием инвариантных многообразий при решении задач оптимального управления.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ, СИНТЕЗ.

Введение

Понятие инвариантного интегрального многообразия, на котором естественные свойства объекта наилучшим образом согласуются с соответствующими технологическими (или техническими) требованиями задачи управления, отражающей цель функционирования данного объекта, лежит в основе синергетической теории управления[1, 3] (СТУ). Наряду со свойством диссипативности систем, оно играет основополагающую роль и в синергетической теории оптимального управления. Это свойство вытекает из вариационной постановки задачи об оптимальном управлении и характеризует некоторые предельные возможности синтезируемой (проектируемой) системы. Такое многообразие будем называть оптимальным инвариантным многообразием (ОИМ). Построение ОИМ в синергетической теории оптимального управления является одной из важных и сложных задач. Решение данной задачи открывает некоторые перспективы в создании иных методов синтеза оптимальных законов управления нелинейными динамическими объектами. В данной работе для решения задачи построения ОИМ, применяется метод последовательного приближения [6] и его модификация.

Без сомнения инварианты присущи процессам и явлениям любой природы. Имеет смысл рассматривать их в теории управления, теории нелинейных колебаний, делая сравнение их особенностей со свойствами экологических систем.

 ISSN 1562-9945

Известно, что в теории нелинейных колебаний многие задачи сводят к рассмотрению и изучению нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Используя специальные замены эти уравнения, могут быть усреднены. В таком случае их исследование значительно упрощается. Так вот оказывается, что во многих случаях усредненные уравнения обладают инвариантными многообразиями, которые могут находиться в достаточно малой окрестности интегральных многообразий исходных точных уравнений. Поэтому использование метода интегральных многообразий значительно упрощает качественное исследование решений систем в том случае, если они расположены на многообразиях меньшей размерности, чем размерность исходного фазового пространства. Основная идея в методе интегральных многообразий состоит в сведении процесса высокой размерности к исследованию последовательности некоторых процессов более низкой размерности.

В ряде работ, в том числе [7–9] было показано, что для природных динамических систем характерно наличие некоторых поверхностей притяжения – инвариантных многообразий в фазовом пространстве. Данные установившиеся режимы получили название аттракторов, т.к. обладают свойством «притягивать» соседние режимы. Таким образом, аттрактор – это притягивающее множество в фазовом пространстве, или другими словами асимптотически устойчивое множество. Аттракторы, отличные от состояний равновесия и строго периодических колебаний, были названы странными аттракторами. Внутри таких аттракторов траектории движутся нерегулярным образом и являются очень чувствительными к изменению начальных условий.

В многочисленных работах, связанных с исследованием аттракторов нелинейных моделей отмечено, что для природных систем характерен режим движения по некоторым многообразиям в их пространстве состояний. Так в системах описывающих процессы, происходящие в водохранилищах, переменные состояния стремятся к таким значениям, которые соответствуют некоторым соотношениям (уравнениям баланса), т.е. инвариантным многообразиям в их пространстве состояний. Имеется связи, когда такого рода отношения накладываются непосредственно не на переменные состояния, а на скорость их изменения. В этом плане природные системы существенно отличаются от обычных систем управления. В них наличие инвариантных многообразий обусловлено необходимостью выполнения законов сохранения, например закона сохранения массы, энергии и т.п. Следовательно, можно сказать, что основная цель функционирования многих природных систем состоит в стабилизации соотношений между их переменными состояния. Математическим следствием данного факта является вырожденность их уравнений динамики и наличие интегральных инвариантов, т.е. некоторых инвариантных многообразий в пространстве состояний. В технических системах существование задаваемых инвариантных многообразий должно обеспечиваться самой процедурой синтеза законов управления рассматриваемого динамического объекта. Именно данное свойство и будет использоваться в основе синтеза нелинейных систем управления.

Постановка задачи синтеза

Пусть объект управления описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{u}), \tag{1}$$

где $x = \left(x_1,\dots,x_n\right)^T$ – вектор координат состояния; $u = \left(u_1,\dots,u_m\right)^T$ – вектор управления; $f = \left(t, f_1(t,x,u),\dots,f_n(t,x,u)\right)^T$; $\mathrm{u} \in \Omega \subset \Re^m$; $f(t,0,0) = 0$, при следующих граничных условиях:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_k) = x_k. \tag{2}$$

Основная задача теории оптимального управления формулируется следующим образом: на множестве допустимых управлений и траекторий $\left\{u(t,x),x(t)\right\}$, удовлетворяющих системе уравнений (1) и краевым условиям (2), определить оптимальное управление $u = u(t,x)$ и соответствующую ему траекторию $x(t)$, которые доставляют минимум функционалу

$$I = \Phi\left[x(t_k)\right] + \int_{t_0}^{t_k} f_0(t,x,u)dt. \tag{3}$$

Здесь предполагается, что левый конец траектории закреплен (x_0 – заданный вектор), а правый подвижен. Пусть ограничения на вектор состояния отсутствуют. Путем ввода дополнительной скалярной переменной

 ISSN 1562-9945

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(t,x,u)dt,$$

задачу оптимального управления (типа Больца) (1)-(3) можно представить в следующем известном виде (задача Майера):

$$\mathrm{I} = x_{n+1}(t_k) + \Phi(x(t_k)) \to \min_u, \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x,u),\ \dot{x}_{n+1}(t) = f_0(t,x,u), \tag{5}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x_{n+1}(t_0) = 0, \tag{6}$$

$$x(t_k) = x_k. \tag{7}$$

Оптимальные инвариантные многообразия и задачи синтеза

Для задачи оптимального управления (4)-(7) в пространстве состояний с координатами $x_1,\ldots,x_n$ определим непрерывную функцию

$$B(x,t) = \int_{t}^{t_k} f_0(t,x,u)dt + \Phi[x(t_k)], \tag{8}$$

которая имеет производные по координатам вектора x во всем пространстве состояний, кроме точек кусочно-гладкого множества M размерности меньшей n, и расположенного в этом пространстве $B(x,t_k) = \Phi(x(t_k))$.

Определение 1. Функцию $B(x,t)$, определенную выражением (8) на оптимальном процессе $\{u(t,x),x(t)\}$, будем называть *функцией оптимальности*.

Заметим, что функция оптимальности $B(x,t)$ совпадает с функцией Беллмана, но имеет расширенное толкование. Функция Беллмана определяется как решение уравнения Беллмана, в то время как функция оптимальности не обязательно связана с решением этого уравнения, и может быть определена с помощью других методов решения задач оптимального управления. В работе [2] А.М. Летовым рассмотрена задача оптимизации системы управления объектом

$$\dot{\mathrm{x}}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = -x_2 + u\,, \tag{9}$$

с функционалом качества

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \left(\mathrm{x}_1^2 + x_2^2 + u^2\right) dt\,. \tag{10}$$

Сформулируем две задачи: 1. Найти функцию оптимальности $B(x_1,x_2)$; 2. Определить оптимальный закон управления $u = u(x_1,x_2)$, переводящий систему (9) из любого начального состояния

$x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$ в начало координат $O = (0,0)^T$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы и доставляющий минимум функционалу качества (10).

Рассмотрим задачу 1. Для ее решения можно использовать метод аналитического конструирования регуляторов (АКОР). В этом случае функция оптимальности $B(x_1,x_2)$ является функцией Беллмана, так как находится путем решения уравнения Беллмана [2]. Однако для нахождения функции оптимальности $B(x_1,x_2)$ можно воспользоваться и другим подходом. Для задачи (9), (10) выпишем функцию Гамильтона $H = -x_1^2 - x_2^2 - u^2 + p_1 x_2 + p_2(-x_2 + u)$, где p_1, p_2 - вспомогательные множители. Из принципа максимума Понтрягина следует, что $\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p_2 = 0$ и $u = \frac{1}{2} p_2$, подстановка которого в H дает следующее выражение $H = -x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{4} p_2^2 + p_1 x_2 - p_2 x_2$. Используя функцию Гамильтона, запишем канонические уравнения:

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = -x_2 + \frac{1}{2} p_2, \quad \dot{p}_1(t) = -2x_1, \quad \dot{p}_2(t) = 2x_2 - p_1 + p_2 \quad .$$

Из этой системы уравнений найдем оптимальные решения для координат x_1, x_2 с учетом начальных условий и того, что $x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$. Получим

$$x_1(t) = \left[x_{10} + (x_{10} + x_{20})t\right] e^{-t}, \quad x_2(t) = \left[x_{20} + (x_{10} + x_{20})t\right] e^{-t}, \tag{11}$$

и оптимальный закон управления: $u = \frac{1}{2} p_2 = x_2 + \dot{x}_2(t) = (x_{10} + x_{20})\, e^{-t}$.

Таким образом, найденные траектории (11) и закон управления определяют оптимальный процесс $\{x_1(t), x_2(t), u(t)\}$. Из соотношений (11) выразим начальные координаты x_{10}, x_{20} через текущие x_1, x_2, получим:

$$x_{10} = (1 - t)\, e^t x_1 - te^t x_2, \quad x_{20} = (1 + t)\, e^t x_2 + te^t x_1. \tag{12}$$

Найдем далее функцию оптимальности $B(x_1,x_2)$. Согласно определению 1, для функционала (10) получаем,

$$B(x_{10}, x_{20}, t) = \int_0^\infty \left\{\left[x_{10} + (x_{10} + x_{20})t\right]^2 + \left[x_{20} - (x_{10} + x_{20})t\right]^2 + (x_{10} + x_{20})^2\right\} e^{-2t} dt.$$

Проинтегрировав его, имеем

 ISSN 1562-9945

$$B(x_{10}, x_{20}, t) = \left\{2x_{10}^2 + 2x_{10}x_{20} + x_{20}^2 + 2x_{10}^2 t + 2x_{10}x_{20}t + (x_{10} + x_{20})^2 t^2\right\} e^{-2t}.$$

Если теперь в это выражение подставим формулы для начальных координат x_{10}, x_{20} (12), то получим вид функции оптимальности

$$B(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2. \tag{13}$$

Полученная функция оптимальности полностью совпадает с выражением υ (9.106) в работе [1] см. стр.169, а также с функцией Беллмана, полученной в работе [2]. Однако в нашем случае функция (13) была найдена без решения уравнения Беллмана.

В расширенное пространство состояний с координатами $x_1, \ldots, x_{n+1}$ введем многообразие, уравнение для которого построим следующим образом: представим выражение (8) в виде

$$B(x,t) - \int_t^{t_k} f_0(t,x,u)dt = \Phi[x(t_k)],$$

выполнив очевидное преобразование

$$B(x,t) - \int_t^{t_k} f_0(t,x,u)dt - \int_{t_0}^{t} f_0(t,x,u)dt + \int_{t_0}^{t} f_0(t,x,u)dt = \Phi[x(t_k)],$$

тогда его можно записать как

$$B(x,t) + \int_{t_0}^{t} f_0(t,x,u)dt = \int_{t_0}^{t_k} f_0(t,x,u)dt + \Phi[x(t_k)]. \tag{14}$$

Воспользовавшись теперь обозначениями для интеграла I (3) и переменной x_{n+1} представим (14) так

$$x_{n+1} + B(x,t) = I. \tag{15}$$

Соотношение (15) и есть уравнение многообразия в расширенном пространстве состояний.

Определение 2. Многообразие (15) будем называть *оптимальным инвариантным многообразием* (ОИМ) задачи оптимального управления (4)- (7) , если функция $B(x,t)$-функция оптимальности, а интеграл I определяется на оптимальном процессе $\{u(t,x), x(t)\}$.

Основываясь теперь на определении 2, можно сформулировать следующее утверждение относительно протекания оптимальных процессов, которое основывается на понятии синергетической теории управления – понятии инвариантов.

Утверждение 1. Допустимый процесс $\{x(t), x_{n+1}(t), u(t,x)\}$, протекающий на ОИМ, является оптимальным.

Данное утверждение представляет собой достаточное условие оптимальности.

Доказательство. Пусть $\{x(t), x_{n+1}(t), u(t,x)\}$ - некоторый допустимый процесс, который протекает на ОИМ и описывается уравнением (15). Из условий осуществимости движения по многообразию, с учетом уравнений состояния процесса (5), следует

$$\left\langle B_x(x(t),t),\, f(x(t),u(t,x),t)\right\rangle + f_0(x(t),u(t,x),t) = 0\,, \qquad (16)$$

где $B_x(x,t) = \left(B_{x_1}(x,t),\dots,B_{x_n}(x,t)\right)^T$; $\langle .,. \rangle$- скалярное произведение векторов.

Так как $B(x,t)$ - функция оптимальности, то, разрешив уравнение (16) относительно u, найдем оптимальный закон управления $u = u(t,x)$, подстановка которого в уравнения (5) позволяет найти оптимальную траекторию $\{x(t), x_{n+1}(t)\}$.

Следовательно, допустимый процесс $\{x(t), x_{n+1}(t), u(t,x)\}$, протекающий на ОИМ, является оптимальным.

Определение 1 и доказательство приведенного утверждения 1 дают следу-ющий конструктивный подход решения задачи 2 примера (продолжение). Преобразуея задачу (9)-(10) к виду (4)-(7), получим

$$\begin{gathered} I = x_3(\infty) \Rightarrow \min_u, \\ \dot{x}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = -x_2 + u, \quad \dot{x}_3(t) = x_1^2 + x_2^2 + u^2, \\ x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad x_3(t_0) = 0, \\ x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0. \end{gathered} \qquad (17)$$

Тогда согласно определению 2, найдем ОИМ вида:

$$x_3 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = I$$

где $I = \left[2x_{10}^2 + 2x_{10}x_{20} + x_{20}^2 + 2x_{10}^2 t_0 + 2x_{10}x_{20}t_0 + (x_{10} + x_{20})^2 t_0^2\right] e^{-2t_0}$.

Доказательство утверждения 1 дает алгоритм поиска оптимального закона управления в форме синтеза. Действительно, из условия осуществимости движения по ОИМ (16) с учетом уравнений состояния (17) получаем уравнение

$$u^2 + 2(x_1 + x_2)u + (x_1 + x_2)^2 = 0.$$

Решив приведенное выше квадратное уравнение относительно u, определяем оптимальный закон управления, $u = -x_1 - x_2$. Он совпадает с оптимальным законом управления, полученным в работе [2].

 ISSN 1562-9945

Рассмотренный пример синтеза оптимального закона управления, основанный на понятии функции оптимальности, ОИМ и утверждении 2 о протекании оптимальных процессов, позволяет представить следующий *алгоритм синтеза оптимальных законов управления*: **1.** Нахождение оптимального процесса $\{x(t),u(t)\}$ как решение задачи программного управления; **2.** Построение функции оптимальности $B(x,t)$ путем нахождения интеграла (8) и определении ОИМ; **3.** Нахождение оптимального закона управления из условия осуществимости движения по ОИМ.

Как и принцип оптимальности Беллмана, изложенный выше вывод, на первый взгляд, кажется достаточно тривиальным фактом. Однако это не так. Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 2. ОИМ, описываемое уравнением (15), является первым интегралом задачи оптимального управления (4)-(7).

Доказательство данного утверждения, сформулированное в виде теоремы, приведено в работе [3]. Оно позволяет интерпретировать абстрактно-математи-ческую задачу оптимального управления на языке естественных наук, в которых первый интеграл ассоциируется с принципом сохранения, например энергии в физике. Такое толкование теории оптимального управления позволяет наполнить ее абстрактные структуры естественным и понятным для инженеров содержанием.

Утверждение 3. Выражение (16), описывающее ОИМ, является уравнением границы множества достижимости (границы интегральной воронки) в расширенном пространстве состояний оптимальной задачи управления (4) – (7).

Известно [4], что, зная границу множества достижимости и хотя бы одну его внутреннюю точку, можно однозначно восстановить и само множество достижимости. В настоящее время множества достижимости играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования [5, 6].

Таким образом, использование синергетического подхода в задачах оптимального управления на основе ОИМ, позволяет представить алгоритмы для построения регуляторов типа обратной связи для разнообразных технических, технологических и других процессов в металлургии и машиностроении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления /Под ред.А.А. Колесникова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч.II – 559 с.
2. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
3. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994.
4. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
7. Томсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985.
8. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
9. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Мир, 1987.

ISSN 1562-9945