УДК 519.24:681

А.В. Кошулян

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ЖОРДАНОВЫХ ТРАЕКТОРИЯХ

Предложена модель автокоррелированных последовательностей измерений на жордановых траекториях, которая учитывает корреляционную связь между крайними её членами. Определены допустимые параметры такой модели и получены алгоритмы формирования соответствующих ей последовательностей, основные свойства которых были исследованы и подтверждены вычислительными экспериментами.

МОДЕЛЬ, АВТОРЕГРЕССИЯ, КОРРЕЛЯЦИЯ, ЖОРДАНОВА КРИВАЯ.

Постановка задачи

Знание моделей измерений технических объектов необходимо для проектирования информационно-измерительных технологий их неразрушающего контроля качества и мониторинга состояния. Без моделей измерений невозможна разработка решающих правил контроля, оценка их эффективности и прогноз остаточного ресурса [1].

В [2] рассматриваются объекты контроля, информативный параметр которых измеряется вдоль жордановой траектории. Примерами таких объектов могут быть сварные швы труб и железнодорожные колеса, в которых скорость распространения ультразвука и напряженность магнитного поля рассеяния измеряются по окружности, являющейся частным случаем кривой Жордана. Предполагается, что измерения объекта вдоль жордановой траектории выполняются с одинаковым шагом, и их модель может быть представлена в виде

$$\mathrm{H}(i) = \mathrm{H}_0(i) + \Delta\,\mathrm{H}(i),$$

где i - номер точки измерения на жордановой траектории, $i \in [1, n]$ n - количество точек измерений, $i, n \in \mathbb{N}$; $\mathrm{H}_0(i)$ - детерминированная медленно меняющаяся функция; $\Delta\,\mathrm{H}(i)$ - флуктуации измеряемого параметра относительно $\mathrm{H}_0(i)$.

 ISSN 1562-9945

Флуктуации $\Delta \mathrm{H}(i)$ представляют собой автокоррелированную последовательность случайных величин. Ввиду того, что при измерениях по жордановой траектории за последней точкой измерений, с номером $i = n$, следует первая $i = 1$, то между членами последовательности $\{z_i\} = \{\Delta H(i)\}$, расположенных на концах, имеется корреляционная связь. В [3] предложена модель последовательностей с указанным свойством, которая имеет вид (1). Она получена на основе известной дискретной модели Марковской последовательности для точек $i > 1$ с добавленным условием замыкания в точке $i = 1$

$$\begin{cases} z_1 = \alpha z_n + \delta\xi_1, & i = 1, \\ z_i = \alpha z_{i-1} + \delta\xi_i, & i > 1; \end{cases} \tag{1}$$

где $\{\xi_i\}$ - последовательность независимых случайных величин; α и δ - постоянные множители.

Порядок модели (1) может оказаться недостаточным для адекватного описания последовательностей, полученных по результатам измерений. В данной работе предлагается модель, основанная на авторегрессионной модели m-го порядка AR(m), $0 < m < n$, которая имеет вид

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k z_{i-k} + \delta\xi_i. \tag{2}$$

Если к (2) добавить условия замыкания, то получим модель замкнутых автокоррелированных последовательностей, которую можно представить следующим образом

$$z_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k z_{n-k+1} + \delta\xi_1, & i = 1, \\ \sum\limits_{k=1}^{i-1} \alpha_k z_{i-k} + \sum\limits_{k=i}^{m} \alpha_k z_{n-k+i} + \delta\xi_i, & 1 < i \le m, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k z_{i-k} + \delta\xi_i, & m < i \le n. \end{cases} \tag{3}$$

Например, подстановкой m=2 в (3), получим модель (4), прообразом которой является случайный процесс Юла для дискретного времени

$$z_i = \begin{cases} \alpha_1 z_n + \alpha_2 z_{n-1} + \delta\xi_1, & i = 1, \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_n + \delta\xi_2, & i = 2, \\ \alpha_1 z_{i-1} + \alpha_2 z_{i-2} + \delta\xi_i, & 2 < i \le n. \end{cases} \tag{4}$$

Для проведения вычислительных экспериментов по оценке эффективности решающих правил контроля качества объектов рассматриваемого типа необходимы алгоритмы формирования таких замкнутых последовательностей, описываемых моделью (3), а также знание их основных свойств, для этого предлагается следующий метод решения данной задачи.

Алгоритм формирования последовательностей

Модель (3) можно представить в виде векторного уравнения

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^k \mathbf{z} + \delta \boldsymbol{\xi} \ , \qquad (5)$$

где $\mathbf{z} = \{z_i\}$ – случайный вектор, составленный из элементов замкнутой последовательности; $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_i\}$ – случайный вектор независимых случайных величин с математическим ожиданием $\mathrm{M}\{\xi_i\} = m_\xi$ и дисперсией $\mathrm{D}\{\xi_i\} = \sigma_\xi^2$; A - оператор сдвига назад; $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ - вектор коэффициентов; δ - постоянный множитель. Матрица линейного оператора A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \dim A = n \times n.$$

Если обозначить $B = I - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^k$, $\dim B = n \times n$, где I - единичная матрица, то решение может быть записано в виде

$$\mathbf{z} = \delta B^{-1} \boldsymbol{\xi} \ , \qquad (6)$$

при этом матрицу оператора B можно представить следующим образом:

$$B = I - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k A^k = 1 \cdot A^0 + \sum_{k=1}^{m} (-\alpha_k) A^k = \sum_{h=0}^{m} b_h A^h = P_B\left(A\right), \qquad (7)$$

где $P_B\left(x\right) = \sum_{h=0}^{m} b_h x^h$ - операторный полином;

Так как матрица B представима в виде (7), то она является матрицей циркулянтной формы [5]. В этом случае операторный

 ISSN 1562-9945

полином $P_B(x)$ является, так называемым, полиномом-представителем матрицы B, каждый столбец которой получается путем циклического сдвига первого столбца $\mathbf{b} = \{b_h\} = \{1, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_m\}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_m & \cdots & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & -\alpha_m & \vdots & -\alpha_3 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & \ddots & 1 & 0 & \vdots & 0 & -\alpha_m & \vdots \\ \vdots & -\alpha_3 & \ddots & -\alpha_1 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & -\alpha_m \\ -\alpha_m & \vdots & \ddots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -\alpha_m & \ddots & -\alpha_3 & -\alpha_2 & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \dim B = n \times n.$$

Для существования обратного оператора B^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $\det B \neq 0$. Определитель матрицы B равен произведению её собственных чисел, следовательно, с учетом циркулянтной формы матрицы B, можно записать

$$\det B = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \prod_{j=1}^{n} P_B\left(\omega^{j-1}\right), \tag{8}$$

где $\lambda_j = P_B\left(\omega^{j-1}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \omega^{k(j-1)}$ – j-е собственное число матрицы B, $j \in [1, n]$; $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ – корень степени n из единицы, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Определитель матрицы отличен от нуля, если ни одно из собственных чисел не равно нулю, $\lambda_j \neq 0, \forall j$. В общем случае, для заданных коэффициентов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ требуется проверка по формуле (8). Для моделирования, их можно выбрать из частных случаев невырожденности матрицы циркулянтной формы, приведенных в [6]. Исходя из этого, матрица B будет невырожденной, если:

1) среди коэффициентов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_m\}$ существует хоть один коэффициент α_j, для которого выполняется условие

$\left|\alpha_j\right| > 1 + \sum_{j \neq k} \left|\alpha_k\right|, \exists j$, или чтобы для всех коэффициентов $\{\alpha_k\}$ выполнялось $\sum_{k=1}^{m} \left|\alpha_k\right| < 1$;

2) коэффициенты $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_m\}$ - рациональные числа, $\alpha_k \in \mathbb{Q}, \forall k$, причем $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \neq 1$, и $n \in \mathbb{P}$ – простое число.

Матрицу обратного оператора можно представить в виде

$$B^{-1} = F\Lambda^{-1}\overline{F} = \frac{1}{n}\overline{W}\Lambda^{-1}W, \tag{9}$$

где Λ^{-1} - диагональная матрица собственных чисел матрицы B^{-1}; $F = n^{-\frac{1}{2}}\overline{W}$ - матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ матрица); W - матрица Вандермонда; $\overline{F}$ и $\overline{W}$ - соответствующие комплексно-сопряженные матрицы

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}; W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{(n-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(n-1)} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2n-2} & \omega^{3n-3} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

Следует заменить, что матрица B^{-1}, которая является обратной для циркулянтной матрицы B, также будет иметь циркулянтную форму [6]. При этом каждый элемент b_{ij}^{-1} матрицы B^{-1} можно вычислить по формуле

$$b_{ij}^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\omega^{(t-1)(j-i)}}{\lambda_t} \tag{10}$$

Из (6) следует формула для определения i-й компоненты вектора $\mathbf{z}$

$$z_i = \delta\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{-1}\xi_j \tag{11}$$

По формуле (11) можно построить алгоритм расчета на ЭВМ последовательности $\{z_i\}$, с вычислительной сложностью не более $O\left(n^2\right)$, если учесть, что:

 ISSN 1562-9945

а) $\omega^a = \omega^{a \bmod n} = w_{a \bmod n}$, где $a \bmod n$ - остаток от деления a на n, $a \in \mathbb{N}, \forall a$.

б) $b_{ij}^{-1} = \begin{cases} b_{i-j}^{-1}, & i \ge j, \\ b_{n+i-j}^{-1}, & i < j; \end{cases}$

где $\left\{b_i^{-1}\right\}$ - элементы первого столбца матрицы $B^{-1} = \left\{b_{ij}^{-1}\right\}$; $\mathbf{w} = \left\{w_i = \omega^i\right\}$ - вектор корней n-й степени из единицы; $i, j \in [0, n-1]$; $i, j \in \mathbb{N}$.

Рассмотренный выше операторный полином $P_B(x) = 1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_m x^m$ также является характеристическим уравнением авторегрессионного процесса m-го порядка AR(m), который является стационарным, только если все корни $\{x_1 \ldots x_k \ldots x_m\}$ характеристического уравнения $P_B(x)$ лежат вне единичного круга $|x_k| > 1, \forall k$[4]. Если параметры $\{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}$ такие, что указанное условие выполняется, то для формирования замкнутой автокоррелированной последовательности может использоваться формула (3), после предварительного вычисления m начальных значений $\{z_{n-k+1}\}$, $k \in [1, m]$ по формуле (11). В этом случае вычислительная сложность алгоритма уменьшиться, поскольку $(n-m)$ элементов последовательности будут вычисляться рекурсивно по формуле (3).

Докажем, что если параметры $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_m\}$ выбраны так, что выполняется условие $\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| < 1$, то в этом случае кроме существования обратного оператора B^{-1} также будет обеспечена стационарность процесса (2). Допустим, что такой выбор приводит к тому, что один из корней $x = x_k, k \in [1, m], \exists k$ характеристического уравнения $P_B(x)$ лежит внутри единичного круга $|x| < 1$, тем самым нарушая условие стационарности. Так как x - корень $P_B(x)$, то должно выполняться тождество $1 = \left|\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m\right|$. Ввиду того, что $|x| < 1$, имеет место неравенство $1 > |x| > \left|x^2\right| > \ldots > \left|x^m\right|$ и, следовательно:

$$1 > \left(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m|\right)|x| > \left(|\alpha_1||x| + |\alpha_2|\left|x^2\right| + \ldots + |\alpha_m|\left|x^m\right|\right) \ge \left|\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m\right|.$$

В этом случае, получается, что левая часть строго больше правой, и поэтому никакое $|x|<1$ не обращает $P_B(x)$ в тождество и, следовательно, не может быть корнем. Таким образом, если сумма модулей коэффициентов меньше единицы, то все корни характеристического полинома $P_B(x)$ лежат вне единичного круга $|x|>1$, обеспечивая стационарность авторегрессионного процесса AR(m).

Основные свойства

Математическое ожидание всех компонент вектора $\mathbf{z}$ одинаково и равно

$$\mathrm{M}[z_i] = \delta\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{-1}\mathrm{M}\left[\xi_h\right] = \delta m_\xi \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{-1} = \delta m_\xi \sum_{j=1}^{n} b_{j1}^{-1} = \delta m_\xi \lambda_1^{-1} = \frac{\delta m_\xi}{1-\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k}. \quad (12)$$

Ковариационная матрица случайного вектора $\mathbf{z}$ равна

$$R_z = \mathrm{M}[\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}] - \mathbf{m_z}\mathbf{m}_z^{\mathrm{T}} = \delta^2\sigma_\xi^2 B^{-1}\left(B^{-1}\right)^T. \quad (13)$$

Ковариационная матрица R_z симметричная и положительно определенная, так как для любого ненулевого вектора $\mathbf{v}$ выполняется неравенство $\mathbf{v}^T\left(\delta^2\sigma_\xi^2 B^{-1}\left(B^{-1}\right)^T\right)\mathbf{v} = \delta^2\sigma_\xi^2\left|\left(B^{-1}\right)^T\mathbf{v}\right|^2 > 0,\ \forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$.

Если обозначить $k=i-j$, то используя (13), (10) и формулу суммы геометрической прогрессии, можно получить выражение для ковариационной функции, которое примет вид

$$R(k) = \frac{\delta^2\sigma_\xi^2}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\omega^{k(t-1)}}{\left|1-\sum\limits_{h=1}^{m}\alpha_h\omega^{h(t-1)}\right|^2} = \frac{\delta^2\sigma_\xi^2}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\omega^{k(t-1)}}{\left|\lambda_t\right|^2}, \quad k\in[0,n],\ k\in\mathbb{N}. \quad (14)$$

Множество $\left\{\left|\lambda_i\right|^{-2}\right\},\ i\in\left[1,n\right], i\in\mathbb{N}$ является множеством собственных чисел матрицы $B^{-1}\left(B^{-1}\right)^T$, которая является матрицей циркулянтной формы, поскольку произведение двух циркулянтных матриц дает циркулянтную. У вещественных матриц циркулянтной формы всегда есть кратные собственные числа, порядок следования которых зависит от четности n. Для матрицы $B^{-1}\left(B^{-1}\right)^T$ они будут встречаться в таком порядке

 ISSN 1562-9945

$$\left\{\left|\lambda_i\right|^{-2}\right\} = \begin{cases} \left\{\left|\lambda_1\right|^{-2}, \ldots, \left|\lambda_s\right|^{-2}, \left|\lambda_{s+1}\right|^{-2}, \left|\lambda_s\right|^{-2}, \ldots, \left|\lambda_2\right|^{-2}\right\}, \ n = 2s, \ s \in \mathbb{N}, \\ \left\{\left|\lambda_1\right|^{-2}, \ldots, \left|\lambda_s\right|^{-2}, \left|\lambda_{s+1}\right|^{-2}, \left|\lambda_{s+1}\right|^{-2}, \left|\lambda_s\right|^{-2}, \ldots, \left|\lambda_2\right|^{-2}\right\}, \ n = 2s + 1; \end{cases} \quad (15)$$

С учетом (15) можно представить функцию ковариации следующим образом:

$$R(k) = \begin{cases} \dfrac{\delta^2 \sigma_\xi^2}{n}\left[\dfrac{1}{\left|\lambda_1\right|^2} + \dfrac{\omega^{k\frac{n}{2}}}{\left|\lambda_{n/2+1}\right|^2} + \sum\limits_{t=2}^{n/2} \dfrac{\omega^{k(t-1)} + \omega^{-k(t-1)}}{\left|\lambda_t\right|^2}\right], & n \bmod 2 = 0, \\ \dfrac{\delta^2 \sigma_\xi^2}{n}\left[\dfrac{1}{\left|\lambda_1\right|^2} + \sum\limits_{t=2}^{(n+1)/2} \dfrac{\omega^{k(t-1)} + \omega^{-k(t-1)}}{\left|\lambda_t\right|^2}\right], & n \bmod 2 = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Так как значения выражений $\omega^{k\frac{n}{2}} = \cos(k\pi) = \pm 1$ и $\omega^{k(t-1)} + \omega^{-k(t-1)} = 2\cos\left(\dfrac{2k(t-1)\pi}{n}\right)$ не зависят от знака k, то из (16) следует, что $R(k) = R(-k) = R(n-k)$: таким образом ковариационная функция симметрична относительно точки $k = n / 2$.

Дисперсия последовательности равна

$$D\left[z_i\right] = R(0) = \frac{\delta^2 \sigma_\xi^2}{n} \sum_{t=1}^{n} \left|\lambda_t\right|^{-2} = \frac{\delta^2 \sigma_\xi^2}{n} \operatorname{tr}\left(B^{-1}\left(B^{-1}\right)^T\right) = \delta^2 \left|B^{-1}\right|^2 \sigma_\xi^2, \quad (17)$$

где $\left|B^{-1}\right|$ - норма Гильберта-Шмидта матрицы линейного оператора B^{-1}.

Если дисперсия $D[z_i]$ задана, то значение δ рассчитывается по формуле (17), полагая известной дисперсию σ_ξ^2.

Корреляционная функция может быть определена как $r(k) = R(k) / R(0)$.

Если компоненты $\{\xi_i\}$ вектора $\boldsymbol{\xi}$ независимые нормальные случайные величины, тогда (6) представляет собой их линейное преобразование и вектор $\mathbf{z} = \{z_i\}$ имеет многомерное нормальное распределение с корреляционной матрицей R_z и математическим ожиданием $\mathrm{M}[z_i]$. В этом случае замкнутые последовательности одинаковой длины n отвечают требованию стационарности в узком смысле.

Вычислительный эксперимент

Для проверки правильности работы алгоритмов формирования замкнутых автокоррелированных последовательностей можно вычислить длину вектора невязки $|\Delta\boldsymbol{\xi}| = |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^*|$, где компоненты вектора $\boldsymbol{\xi}^* = \{\xi_i^*\}$ определяются по вектору $\mathbf{z}$ и известным параметрам модели, следующим образом

$$\xi_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta}\left[z_1 - \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k z_{n-k+1}\right], & i = 1, \\ \dfrac{1}{\delta}\left[z_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \alpha_k z_{i-k} - \sum\limits_{k=i}^{m} \alpha_k z_{n-k+i}\right], & 1 < i \le m, \\ \dfrac{1}{\delta}\left[z_i - \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k z_{i-k}\right], & m < i \le n. \end{cases}$$

В результате вычислительного эксперимента была получена величина невязки для последовательностей с различным порядком модели m равным количеству элементов вектора $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1 \ldots \alpha_m\}$ и при постоянных параметрах $n = 100$, $\sigma_\xi^2 = 1$ и $\delta = 1$. Результаты представлены в табл.1-табл.3 для двух алгоритмов: **I** – линейного преобразования по формуле (6) и **II** – по формуле (3), с предварительно вычисленными начальными значениями по формуле (6). В табл. 1 вектор $\boldsymbol{\alpha}$ задан таким образом, чтобы соблюдались условия стационарности авторегрессионной модели, а параметр $m_\xi = 0$. В табл.2 вектор $\boldsymbol{\alpha}$ такой же, как и в табл.1, но параметр $m_\xi = 100$. В табл.3 $m_\xi = 0$ и вектор $\boldsymbol{\alpha}$ выбран так, чтобы условия стационарности нарушались.

Таблица 1

$\boldsymbol{\alpha}$	{0.9}	{-0.9}	{0.7; 0.2}	{0.6; -0.2; 0.1}	{0.1; 0.1; 0.6; 0.1}
$\lvert\Delta\boldsymbol{\xi}\rvert_{\mathrm{I}}$	2.3×10^{-14}	1.7×10^{-14}	1.4×10^{-14}	8.3×10^{-15}	8.7×10^{-15}
$\lvert\Delta\boldsymbol{\xi}\rvert_{\mathrm{II}}$	4.2×10^{-15}	1.2×10^{-15}	2.5×10^{-15}	1.8×10^{-15}	2.1×10^{-15}

Таблица 2

$\boldsymbol{\alpha}$	{0.9}	{-0.9}	{0.7; 0.2}	{0.6; -0.2; 0.1}	{0.1; 0.1; 0.6; 0.1}
$\lvert\Delta\boldsymbol{\xi}\rvert_{\mathrm{I}}$	1.4×10^{-12}	4.2×10^{-12}	1.8×10^{-12}	1.7×10^{-12}	1.7×10^{-12}
$\lvert\Delta\boldsymbol{\xi}\rvert_{\mathrm{II}}$	3.5×10^{-13}	2.1×10^{-13}	9.7×10^{-13}	4.4×10^{-13}	4.5×10^{-13}

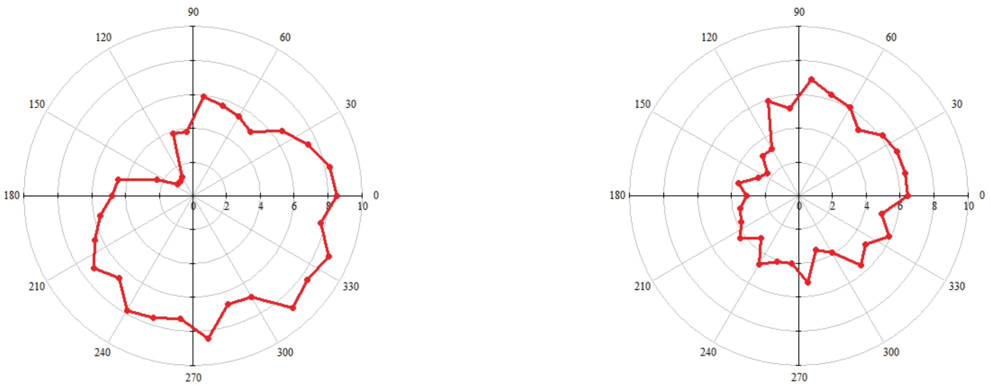
 ISSN 1562-9945

Таблица 3

α	{1.5}	{-1.5}	{0.9; 0.5}	{0.9; 0.5; 0.7}	{0.9; 0.7; 0.3; 0.1}
$\lvert\Delta\xi\rvert_{\mathrm{I}}$	1.1×10^{-14}	8.9×10^{-15}	9.2×10^{-15}	9.1×10^{-15}	8.3×10^{-15}
$\lvert\Delta\xi\rvert_{\mathrm{II}}$	133.6	153.3	0.121	282.1	331,3

Как следует из табл.1 рассмотренные алгоритмы обеспечивают малую величину невязки $\lvert\Delta\xi\rvert \approx 10^{-14} \approx 0$. Анализ табл.2 показывает, что величина m_ξ может отличаться от нуля, а необходимость выполнения требования стационарности авторегрессионной модели для алгоритма **II**, видна из табл.3.

На рис.1, в полярной системе координат, показаны траектории случайных последовательностей 1-го и 2-го порядка с постоянными параметрами модели $n = 30, \sigma_\xi^2 = 1$, $m_\xi = 0$, $\delta = 1$ и разными коэффициентами $\{\alpha_k\}$. Значение полярного угла рассчитывается по формуле $\varphi_i = \Delta\varphi \cdot (i-1)$, где $\Delta\varphi = 2\pi / n$. Значение полярного радиуса определяется по формуле $\rho(\varphi_i) = H_0 + \Delta H(i)$, где $H_0 = 5$, $\Delta H(i) = z_i$. Замкнутые последовательности, показанные на рис.1, были сформированы из одной и той же выборки независимых случайных величин по алгоритму II.



а) б)

Рисунок 1 - Примеры траекторий замкнутых случайных последовательностей;
а) $\boldsymbol{\alpha} = \{0.9\}$; б) $\boldsymbol{\alpha} = \{0.9, -0.4\}$

Для параметров $\delta = 1$, $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi^2 = 1$ модели было выполнено сравнение расчетных значений коэффициентов корреляции со значениями, полученными на основе вычислительного эксперимента.

Для этого генерировалось N=10000 последовательностей размером n=30 каждая. Для полученных последовательностей было зафиксировано сечение в точке i=1, после чего с шагом $k \in [0, n]$, $k \in \mathbb{N}$ вычислялся коэффициент корреляции между 1-м и $i+k$-м сечениями. Результаты представлены в виде графика на рисунке 2, где точки – это выборочные значения коэффициентов корреляции, а линии соединяют точки, полученные расчетным путем по формуле (14).

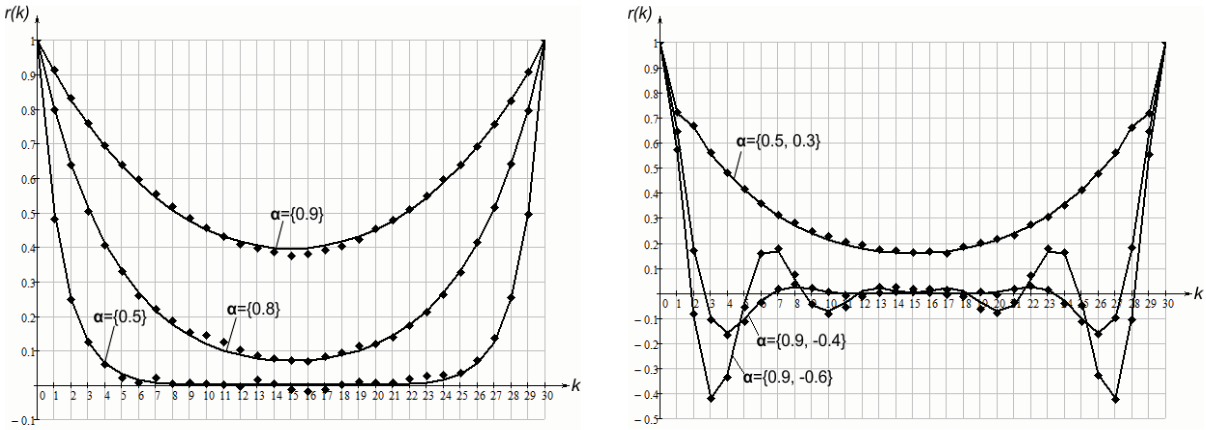


Рисунок 2 - Эмпирическая и теоретическая функция корреляции

Как видно на рис.2 экспериментальные значения корреляции практически такие же, как и расчетные, а увеличение порядка модели позволяет получать последовательности с различными корреляционными характеристиками.

Выводы

1. Предложена модель автокоррелированных последовательностей измерений вдоль жордановых траекторий, которая учитывает корреляционную связь между крайними её членами. Возможность выбора порядка модели позволяет получать последовательности с широким разнообразием корреляционных свойств.

2. Разработаны алгоритмы формирования таких последовательностей, работоспособность которых проверена на основе вычислительного эксперимента. Для формирования каждого члена последовательности можно использовать либо линейное преобразование независимых случайных величин, либо, с помощью этого преобразования, получить только m начальных значений, а остальные, рассчитать, используя известную формулу авторегрессии m-го порядка. Установлено, что в первом случае параметры модели

 ISSN 1562-9945

должны удовлетворять только условию существования обратного оператора, а во втором, еще дополнительно и требованию стационарности (асимптотической устойчивости) авторегрессионной модели m-го порядка AR(m).

3. Исследованы основные свойства последовательностей: их дисперсии и функции автокорреляции зависят от размера выборки, причем автокорреляционная функция симметрична относительно точки $n/2$. Последовательности одинакового размера с нормальным законом распределения вероятностей удовлетворяют требованию стационарности в узком смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малайчук В.П. Математическая дефектоскопия: Монография / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой.-Д.:Системные технологии, 2005. -180 с.
2. Кошулян А.В. Сингулярный спектральный анализ замкнутых пространственных рядов / А.В. Кошулян, В.П. Малайчук -Д.: Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 3 (74), 2011, с. 46-51.
3. Кошулян А.В. Моделирование автокоррелированных последовательностей измерений вдоль жордановой траектории / А.В. Кошулян, В.П. Малайчук -Д.: Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 1(78), 2012, с. 9-17.
4. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление: Пер. с англ. // Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974, кн. 1. – 406 с.
5. Golub, Gene H.; van Loan, Charles F. (1996), Matrix Computations, 3rd edition, Johns Hopkins University Press; ISBN 978-0-8018-5414-9.
6. Irwin Kra, Santiago r. Simanca. On circulant matrices. State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794, U.S.A.