

УДК 519.3

І.О. Астіоненко, О.І. Литвиненко, А.Н. Хомченко

## ЗГЛАДЖЕНІ АПРОКСИМАЦІЇ ТРИКВАДРАТИЧНОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА

*В роботі виконано згладжування (за методом найменших квадратів) багатопараметричних базисних функцій, що отримані за допомогою аналітичного методу конструювання ієрархічних форм на триквдратичному скінченному елементі серендипової сім'ї.*

*СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ СЕРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї, ЗГЛАДЖЕНА АПРОКСИМАЦІЯ, ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ, МОДИФІКОВАНИЙ БАЗИС.*

### Постановка проблеми

Серендипів скінченний елемент з триквдратичною інтерполяцією використовують при розв'язанні тривимірних задач дифузії, фільтрації та теорії пружності. Стандартний базис цього елемента можна отримати матричним методом або за допомогою інтерполяційної процедури Тейлора. Стандартні функції форми мають вагомий недолік: вони допускають паразитні зсувні ефекти при розв'язанні певного класу задач [1].

### Аналіз публікацій за темою дослідження

Вперше появу паразитних зсувних ефектів було виявлено при аналізі консольної балки під дією рівномірного навантаження, яка розв'язувалась методом скінченних елементів з використанням серендипового скінченно елемента з біквдратичною інтерполяцією [1]. На біквдратичному скінченному елементі для усунення цього недоліку була використана процедура згладжування стандартного інтерполяційного полінома, що базується на інтегральному методі найменших квадратів [1,2,3]. Вилучення “зайвих” членів дозволило отримати на елементі інтерполяційний поліном, що змінюється за квадратичним законом не тільки вздовж прямих, що паралельні координатним осям, але і в довільному напрямку.

**Мета статті** – за допомогою методу найменших квадратів виконати згладжування базисних функцій просторового скінченно елемента з триквдратичною інтерполяцією.

---

© Астіоненко І.О., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н., 2012

### Основна частина

Розглянемо просторовий скінченний елемент з 20 вузлами, що рівномірно розташовані на ребрах елемента (рис. 1) ( $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1, |\zeta| \leq 1$ ).

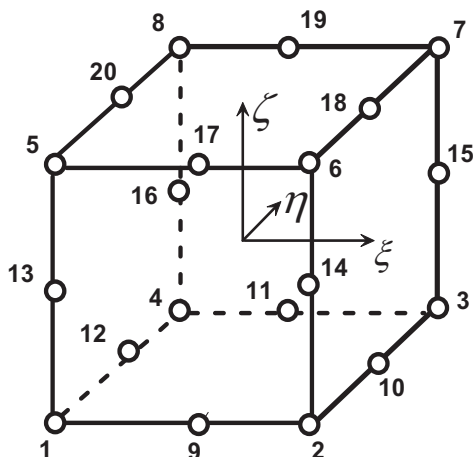


Рис. 1. CSE-20

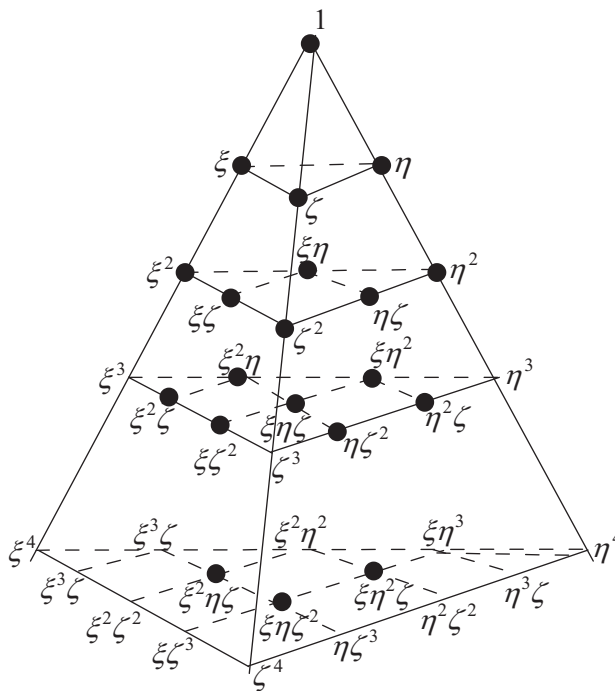


Рис. 2. Схема Паскаля для просторового CSE-20 (20 параметрів)

Система базисних функцій стандартного елемента має вигляд [4]:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2),$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = \overline{1, 8}. \quad (1)$$

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta),$$

$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 11, 17, 19. \quad (2)$$

Решта функцій утворюються із (2) шляхом циклічного переставлення  $\xi, \eta, \zeta$ .

Є підстави вважати, що паразитні ефекти, які виникають при розв'язанні задач теорії пружності, викликані присутністю “зайвих” мономів у стандартному інтерполяційному поліномі CSE-20 у порівнянні з повним поліномом другого порядку від трьох аргументів.

У інтегральному методі найменших квадратів (МНК) за міру відхилення інтерполяційного полінома даного елемента

$$\begin{aligned} \phi = & \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \xi \eta + \alpha_7 \eta^2 + \alpha_8 \eta \zeta + \alpha_9 \zeta^2 + \\ & + \alpha_{10} \xi \zeta + \alpha_{11} \xi^2 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^2 + \alpha_{13} \xi^2 \zeta + \alpha_{14} \xi \zeta^2 + \alpha_{15} \eta \zeta^2 + \alpha_{16} \eta^2 \zeta + \\ & + \alpha_{17} \xi \eta \zeta + \alpha_{18} \xi^2 \eta \zeta + \alpha_{19} \xi \eta^2 \zeta + \alpha_{20} \xi \eta \zeta^2 \end{aligned} \quad (3)$$

від загладжуваної функції (повного полінома другого порядку від трьох аргументів)

$$\bar{\phi} = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \zeta + \beta_5 \xi^2 + \beta_6 \xi \eta + \beta_7 \eta^2 + \beta_8 \eta \zeta + \beta_9 \zeta^2 + \beta_{10} \xi \zeta \quad (4)$$

по об'єму  $\Omega$  куба  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  приймемо величину

$$\chi = \iiint_{\Omega} (\phi - \bar{\phi})^2 d\xi d\eta d\zeta. \quad (5)$$

Метод найменших квадратів у інтегральній формі дозволив отримати новий субститут-базис для 20-вузлового просторового ССЕ. Базисні функції для вузлів 1 і 9 записані у наступних формулах:

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{24} (-6 + \xi + \eta + \zeta + 3\xi^2 + \xi\eta + 3\eta^2 + \eta\zeta + 3\zeta^2 + \xi\zeta), \quad (6)$$

$$\bar{N}_9 = \frac{1}{12} (3 - 2\eta - 2\zeta - 3\xi^2 + 2\eta\zeta). \quad (7)$$

Функції субститут-базису задовольняють умові вагового балансу: сума базисних функцій на скінченному елементі дорівнює одиниці.

В [3] показано новий аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій скінченного елемента, в якому базисні функції отримано за допомогою адитивного уточнення. Цей метод доводить неоднозначність апроксимації функції двох і трьох аргументів на серендипових елементах вищих порядків.

Множину альтернативних базисів на ССЕ-20 можливо отримати додаванням до поверхні стандартного базису (формули (1)-(2)) поверхні другого порядку з відповідним коефіцієнтом  $K$ :

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \times \\ & \times ((-2 - \xi - \eta - \zeta) + K(\xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta + 2\xi + 2\eta + 2\zeta + 3)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$N_9 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \left( (1 + \xi) - \frac{1}{2} K (1 + \xi)(2 + \eta + \zeta) \right), \quad (9)$$

де  $N_1, N_9$ - модифіковані базисні функції ССЕ-20.

Запишемо узагальнені формули для реалізації аналітичного методу побудови ієрархічних форм базисних функцій 20-вузлового ССЕ [3]:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \times (-2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta + K(\xi_i \eta_i \xi \eta + \xi_i \zeta_i \xi \zeta + \eta_i \zeta_i \eta \zeta - 2\xi_i \xi - 2\eta_i \eta - 2\zeta_i \zeta + 3)),$$

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = \overline{1, 8}, \quad (10)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \left(1 - \frac{1}{2}K(2 - \eta_i \eta - \zeta_i \zeta)\right),$$

$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 9, 11, 17, 19. \quad (11)$$

Решта функцій утворюються із (11) шляхом циклічного переставлення  $\xi, \eta, \zeta$ .

Альтернативні базиси на ССЕ-20 мають двадцять шість мономів у інтерполяційному поліномі.

*Зауваження.* Вміння ефективно керувати кількістю параметрів інтерполяційного полінома є дуже важливим в теорії серендипових апроксимацій. В деяких задачах виникає необхідність включати додаткові (“приховані”) параметри, так що кількість параметрів перевищує кількість вузлів. Інколи навпаки, вилучення “зайвих” членів забезпечує згладжування деформації.

Мінімізуючи функціонал (5) з підінтегральними функціями (8) і (9), можна отримати згладжені функції з параметром:

$$\overline{N}_1 = \frac{1}{24} \left( (-6 + 8K) + \left(1 - \frac{4}{3}K\right) (\xi + \eta + \zeta) + (3 - 4K)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta \right), \quad (12)$$

$$\overline{N}_9 = \frac{1}{36} \left( (9 - 8K) + (2K - 6)(\eta + \zeta) + (6K - 9)\xi^2 + 3K(\eta^2 + \zeta^2) + 6\eta\zeta \right). \quad (13)$$

Решта функцій утворюються із (13) шляхом циклічного переставлення  $\xi, \eta, \zeta$ .

Для функцій форми субститут-базису інтерполяційна гіпотеза Лагранжа не виконується.

Значення функції  $\overline{N}_1(\xi, \eta, \zeta)$  у вузлах ССЕ-20 (табл. 1):

Таблиця 1

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{N}_1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24} - \frac{K}{9}$	$\frac{1}{8} - \frac{2K}{9}$	$\frac{1}{24} - \frac{K}{9}$	$\frac{1}{24} - \frac{K}{9}$	$\frac{1}{8} - \frac{2}{9}K$	$\frac{3}{8} - \frac{1}{3}K$
№ вузла	8	9	10	11	12	13	14
$\bar{N}_1$	$\frac{1}{8} - \frac{2K}{9}$	$-\frac{1}{24} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{24} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{24}$
№ вузла	15	16	17	18	19	20	
$\bar{N}_1$	$\frac{1}{8} - \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8} - \frac{K}{9}$	$\frac{1}{8} - \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{24}$	

Для  $\bar{N}_9(\xi, \eta, \zeta)$  (табл. 2):

Таблиця 2

№ вузла	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{N}_9$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{9}$	$-\frac{1}{6} + \frac{2K}{9}$
№ вузла	8	9	10	11	12	13	14
$\bar{N}_9$	$-\frac{1}{6} + \frac{2K}{9}$	$\frac{3}{4} - \frac{K}{6}$	$\frac{1}{6} - \frac{K}{36}$	$\frac{1}{12} - \frac{K}{18}$	$\frac{1}{6} - \frac{K}{36}$	$\frac{1}{6} - \frac{K}{36}$	$\frac{1}{6} - \frac{K}{36}$
№ вузла	15	16	17	18	19	20	
$\bar{N}_9$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{12}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{12}$	$\frac{1}{12} - \frac{K}{18}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{12}$	$\frac{1}{12} + \frac{K}{18}$	$-\frac{1}{6} + \frac{K}{12}$	

Розглянемо повузловий розподіл рівномірної масової сили по вузлах триквадратичного скінченного елемента зі згладженою апроксимацією. Для ССЕ вузлова доля рівномірної масової сили визначається потрійним інтегралом по об'єму  $\Omega$  скінченного елемента від відповідної базисної функції, зваженої з об'ємною щільністю  $\gamma$ :

$$p_i = \iiint_{\Omega} \gamma N_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \quad \gamma = \frac{1}{8}. \quad (14)$$

Зазначимо, що повузловий розподіл рівномірної масової сили для згладжених функцій співпадає з розподілом для ієрархічних функцій (10) і (11) у аналітичному методі. Розподіл одиничної маси має наступний вигляд:

$$p_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{6}K, \quad p_9 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}K. \quad (15)$$

Згладжена апроксимація для ССЕ-20 має властивість: у довільному напрямку поле змінюється за квадратичним законом, що дозволить уникнути паразитних зсувних ефектів при розв'язанні тривимірних задач теорії пружності. Нагадаємо, що для стандартного ССЕ-20 квадратична зміна поля відповідає тільки трьом взаємно перпендикулярним напрямкам, що паралельні координатним осям.

### Висновки

Вперше отримані нові субститут-базиси на скінченному елементі з триквадратичною інтерполяцією. Цікавим є питання побудови згладжених апроксимацій на скінченних елементах ССЕ-32 і ССЕ-44 у просторі.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Jeyachandrabose C. Least squares strain smoothing for the eight-node serendipity plane stress element / C. Jeyachandrabose, J. Kirkhope // Num. Meth. in Eng. — № 20. — 1984. — p.1164-1166.
2. Хомченко А.Н. Про інтегральне квадратичне апроксимування на серендипових елементах / А.Н. Хомченко, Б.А. Хомченко // Нелин. краевые задачи матем. физики и их прилож.: сб. науч. тр. □К.: Ин-т математики, 1996. □ С. 270-272.
3. Хомченко А.Н. Новый подход к построению базисов серендиповых элементов / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, И.А. Астионенко // Геом. та комп. моделювання. Зб. наук. праць. — Вип. 23. — Харків: ХДУХТ, 2009. — С.90-95.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.