УДК 519.24:681

А.В. Кошулян, В.П. Малайчук

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ВДОЛЬ ЖОРДАНОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

Аннотация. Предложен алгоритм формирования автокоррелированных последовательностей измерений вдоль простого замкнутого контура, на основе системы разностных уравнений 1-го порядка и результаты исследования их статистических закономерностей, отличающиеся от Марковских.

Ключевые слова: замкнутый случайный процесс, авторегрессия, модель.

Постановка задачи

В задачах проектирования информационно-измерительных технологий неразрушающего контроля и мониторинга технических объектов измеряемые параметры качества по своей физической природе являются случайными величинами. Причины их случайности – влияние неконтролируемых и случайных факторов технологических процессов производства, ошибок измерений, а также ограничение на объем измерений. Разработка решающих правил контроля, оценка их эффективности и прогноз остаточного ресурса невозможен без знания математических моделей измерений[1].

В [2] рассматривается класс линейно-протяженных замкнутых объектов контроля (сварные швы труб, железнодорожные колеса). Для таких объектов измерение параметров физического поля (напряженность магнитного поля, остаточные напряжения) выполняются вдоль замкнутого контура, который представляет собой в общем случае Жорданову кривую (кривая, которая имеет только одну точку самопересечения), в частности окружность. Математическая модель измерений объекта такого класса может быть представлена в виде

$$x(i,k) = H(i) + \Delta H(i) + \Delta x(i,k)\,, \tag{1}$$

где i - номер точки измерения, $i \in [1,n]$ n - количество точек измерений; k - номер измерения в этой точке; $H(i)$ - детерминированная

 ISSN 1562-9945

медленно меняющаяся функция; $\Delta H(i)$ - флуктуации измеряемого параметра относительно $H(i)$; $\Delta x(i,k)$ - случайные независимые ошибки измерений.

Флуктуации $\Delta H(i) = z_i$ представляют собой автокоррелированную последовательность случайных величин, которая отличается от известной Марковской последовательности 1-го порядка, тем, что она конечная $i \in [1,n]$ и замкнутая: за последней точкой измерений с номером n следует первая.

Марковская последовательность описывается разностным уравнением

$$z_i = \alpha z_{i-1} + \delta \xi_i \qquad (2)$$

где ξ_i - последовательность независимых нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; α и δ - постоянные множители.

Если к уравнению (2) добавить условие замыкания

$$z_1 = \alpha z_n + \delta \xi_1, \qquad (3)$$

то уравнения (2) и (3) будут описывать замкнутую автокоррелированную последовательность случайных величин.

Для проведения вычислительных экспериментов по оценке эффективности решающих правил контроля качества объектов рассматриваемого типа необходимы математические модели и алгоритмы формирования последовательностей, обладающих свойством (2) и (3). Предлагается метод решения этой задачи и результаты исследования свойств таких замкнутых последовательностей случайных величин.

Алгоритм формирования замкнутых последовательностей

Уравнения (2) и (3) запишем как систему уравнений, в которой заданы формирующая выборка $\{\xi_i\}$ независимых случайных величин с математическим ожиданием $\mathrm{M}\{\xi_i\} = m_\xi$, дисперсией $\mathrm{D}\{\xi_i\} = \sigma_\xi^2$ и параметры $\alpha > 0$ и $\delta > 0$

$$\begin{cases} z_1 - \alpha z_n = \delta\xi_1, \\ z_2 - \alpha z_1 = \delta\xi_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_i - \alpha z_{i-1} = \delta\xi_i, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_n - \alpha z_{n-1} = \delta\xi_n. \end{cases} \tag{4}$$

Решение системы (4) можно представить в векторном виде

$$\mathrm{z} = \delta B^{-1}\xi \;, \tag{5}$$

где $\mathrm{z} = \{z_i\}$- случайный вектор замкнутой последовательности; $\xi = \{\xi_i\}$- вектор независимых случайных величин; $B = \{b_{ij}\}$- квадратная матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \ \dim B = n \times n \, ; b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -\alpha, & i = j+1, \\ -\alpha, & i = 1 \wedge j = n. \end{cases}$$

Определитель матрицы B равен:

$$\det B = 1 - \alpha^n \,.$$

Для существования обратной матрицы B^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $\det B \neq 0$, что выполняется для любых α и n, за исключением $\alpha = 1$. Обратную матрицу можно представить в виде

$$B^{-1} = \frac{1}{1-\alpha^n} C \,,$$

где союзная матрица C является вещественной матрицей циркулянтной формы и записывается в виде

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \cdots & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^{n-1} & \cdots & \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \cdots & \alpha^5 & \alpha^4 & \alpha^3 \\ \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & \cdots & \alpha^6 & \alpha^5 & \alpha^4 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \alpha^{n-4} & \cdots & \alpha & 1 & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \cdots & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}; C = \{c_{ij}\} \,,$$

 ISSN 1562-9945

$$c_{ij} = \begin{cases} \alpha^{i-j}, & i \geq j, \\ \alpha^{n-j+i}, & i < j. \end{cases} \tag{6}$$

Решение (5) получим в векторной форме

$$\mathrm{z} = \frac{\delta}{1-\alpha^n} C\xi \ . \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что $z_i = \dfrac{\delta}{1-\alpha^n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\xi_k$ и, следовательно, можно записать формулу для определения i-й компоненты вектора **z**

$$z_i = \frac{\delta\alpha^i}{1-\alpha^n}\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}\xi_k + \delta\sum_{k=1}^{i}\alpha^{i-k}\xi_k. \tag{8}$$

Полагая в (8) $i = n$, получим выражение для определения компоненты z_n

$$z_n = \frac{\delta}{1-\alpha^n}\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}\xi_k. \tag{9}$$

Таким образом, для формирования замкнутой автокоррелированной последовательности случайных величин $\{z_i\}, i \in [1, n]$ размером n необходимо:

1) получить выборку независимых случайных величин $\{\xi_i\}, i \in [1, n]$;

2) по формуле (9) рассчитать значение z_n;

3) используя z_n в качестве начального значения и выборку $\{\xi_i\}$ рассчитать по формуле (2) остальные члены $\{z_i\}, i \in [1, n-1]$ замкнутой последовательности.

Основные свойства

Вектор математического ожидания случайного вектора z

$$\mathrm{m_z} = \mathrm{M[z]} = \frac{\delta}{1-\alpha^n} C\ \mathrm{M}[\xi\ ] = \frac{\delta}{1-\alpha^n} C\mathrm{m}_\xi\ , \tag{10}$$

где m_ξ - вектор математического ожидания случайного вектора ξ .

Поскольку математическое ожидание всех компонент вектора ξ одинаково $\mathrm{M}\{\xi_i\} = m_\xi$, а запись (10) аналогична (7), за исключением того, что в (10) вместо вектора ξ стоит вектор его математического ожидания, то используя (8) и подсчитав соответствующие суммы, получим

$$\mathrm{M}[z_i] = \frac{\delta}{1-\alpha} m_\xi \qquad (11)$$

Ковариационную матрицу случайного вектора z определим по формуле

$$R_z = \mathrm{M}[\mathrm{zz}^\mathrm{T}] - \mathrm{m_z m}_z^\mathrm{T}. \qquad (12)$$

Подстановкой (7) и (10) в (12) получим

$$R_z = \left(\frac{\delta}{1-\alpha^n}\right)^2 C R_\xi C^\mathrm{T}, \qquad (13)$$

где $R_\xi = \mathrm{M}[\xi\ \xi^\mathrm{T}] - \mathrm{m}_\xi \mathrm{m}_\xi^\mathrm{T}$ - ковариационная матрица случайного вектора ξ, независимых случайных величин. Так как $\mathrm{D}\{\xi_i\} = \sigma_\xi^2$, то $R_\xi = \sigma_\xi^2 I$ и (13) можно записать в виде

$$R_z = \left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^2 C C^\mathrm{T}. \qquad (14)$$

Ковариационная матрица в (14) кроме того, что симметричная также циркулянтная, поскольку произведение двух циркулянтных матриц дает циркулянтную [4].

Каждый элемент $\{\mathrm{R}_{ij}\}$ матрицы R_z определяется по правилу

$$\mathrm{R}_{ij} = \left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} c_{ik} c_{jk}. \qquad (15)$$

С учетом (15) и (6), и симметричности ковариационной матрицы, можно записать формулы для вычисления ее элементов

$$\mathrm{R}_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^2 \left[\sum\limits_{k=1}^{i} \alpha^{i+j-2k} + \sum\limits_{k=i+1}^{j} \alpha^{n+i+j-2k} + \sum\limits_{k=j+1}^{n} \alpha^{2n+i+j-2k}\right], & i \le j < n, \\ \left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^2 \left[\sum\limits_{k=1}^{i} \alpha^{i+n-2k} + \sum\limits_{k=i+1}^{n} \alpha^{2n+i-2k}\right], & i \ne n \wedge j = n, \\ \left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^{2(n-k)}, & j = n \wedge i = n. \end{cases} \qquad (16)$$

Свернув суммы в (16) и выполнив упрощения, получим

$$\mathrm{R}_{ij} = \delta^2 \frac{\alpha^{2j} + \alpha^{2i+n}}{\alpha^{i+j}\left(1-\alpha^n\right)\left(1-\alpha^2\right)} \sigma_\xi^2, \qquad (17)$$

Замена $j = i + k$ приводит (17) к виду

 ISSN 1562-9945

$$R(k)=\delta^2\frac{\alpha^k+\alpha^{n-k}}{\left(1-\alpha^n\right)\left(1-\alpha^2\right)}\sigma_\xi^2,\ k\in[0,n],\ k\in\mathbb{N}, \tag{18}$$

где под $R(k)$ понимается ковариационная функция $R(k)=R(|i-j|)$.

Ковариационная матрица R_z должна быть невырожденная и положительно определенная. Определитель ковариационной матрицы равен

$$\det K_z=\left|\left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^2 CC^{\mathrm{T}}\right|=\left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^{2n}|C|^2=\left(\frac{\delta\sigma_\xi}{1-\alpha^n}\right)^{2n}\left|\left(1-\alpha^n\right)B^{-1}\right|^2=\frac{\left(\delta\sigma_\xi\right)^{2n}}{\left(1-\alpha^n\right)^2} \tag{19}$$

Матрица R_z является циркулянтной. Для матриц циркулянтной формы собственные числа представляют собой дискретное преобразование Фурье первой строки матрицы[4]. С учетом (18) можно записать

$$\lambda_j=\sum_{k=0}^{n-1}R(k)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{n}\right)=\frac{\delta^2\sigma_\xi^2}{\left(1-\alpha^n\right)\left(1-\alpha^2\right)}\left[\left(\alpha^n+1\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^k+\alpha^{n-k}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{n}\right)\right] \tag{20}$$

где λ_j - *j-е* собственное число, $j\in[1,n]$, $j\in\mathbb{N}$; i - мнимая единица.

После вычисления суммы в (20) и упрощений с использованием формулы Эйлера, получим

$$\lambda_j=\frac{\delta^2\sigma_\xi^2}{\left[\alpha-\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]^2+\sin^2\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}=\frac{\delta^2\sigma_\xi^2}{\alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)+1} \tag{21}$$

Как следует из (19) и (21) ковариационная матрица R_z является невырожденной и положительно определенной при любых значениях δ, σ_ξ и $\alpha\neq1$.

Из (18) следует, что $R(k)=R(n-k)$, т.е. ковариационная функция симметрична относительно точки $n/2$, в которой имеет минимум.

Дисперсия и корреляционная функция равны

$$D[z_i]=R(0)=\delta^2\frac{\alpha^n+1}{\left(1-\alpha^n\right)\left(1-\alpha^2\right)}\sigma_\xi^2=const; \tag{22}$$

$$r(k)=\frac{R(k)}{R(0)}=\frac{\alpha^k+\alpha^{n-k}}{1+\alpha^n},\ k\in[0,n],\ k\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Если выбрать $\alpha \in (0,1)$ то при малых и больших значениях k относительно n, корреляция $r(k) \approx \alpha^k$ будет примерно такой же, как и для Марковского процесса (2), а дисперсия, при больших значениях n, равна $D[z_i] \approx \dfrac{\delta^2\sigma^2}{1-\alpha^2}$.

Если дисперсия $D[z_i]$ задана, то значение δ рассчитывается по формуле (22), полагая известной дисперсию σ_ξ^2.

Если компоненты $\{\xi_i\}$ вектора ξ независимые нормальные случайные величины, тогда (7) представляет собой их линейное преобразование и согласно [3] вектор $\mathrm{z} = \{z_i\}$ имеет многомерное нормальное распределение с корреляционной матрицей R_z и математическим ожиданием $\mathrm{M}[z_i]$. В этом случае замкнутые последовательности отвечают требованию стационарности в узком смысле.

Вычислительный эксперимент

Для параметров $\delta = 1$, $\alpha = 0.9$ из выборки размером $n = 30$ независимых нормальных случайных величин (табл. 1) с математическим ожиданием $m_\xi = 0$, и дисперсией $\sigma_\xi^2 = 1$ получена замкнутая последовательность (табл. 2), для которой, как можно убедиться, выполняются требование замкнутости (2) и (3).

Таблица 1

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
ξ_i	1.328	-0.265	0.535	-2.389	0.821	-0.047	0.208	-0.115	0.386	-1.273
i	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
ξ_i	-0.423	-0.105	-0.771	1.23	-0.775	2.118	-0.744	-0.289	1.284	0.287
i	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
ξ_i	0.636	-1.704	-0.256	-0.861	0.833	0.835	-0.975	0.124	1.512	-0.024

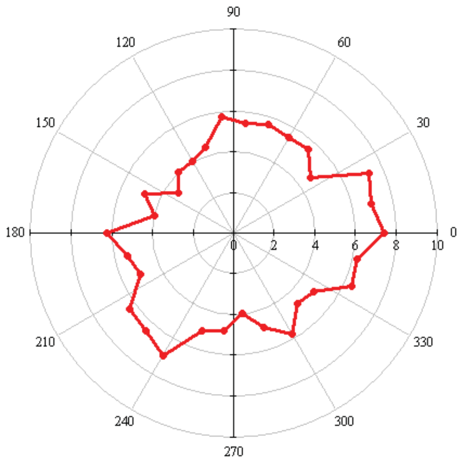
Таблица 2

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
z_i	2.416	1.909	2.253	-0.361	0.495	0.398	0.567	0.396	0.742	-0.605
i	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
z_i	-0.968	-0.976	-1.65	-0.254	-1.004	1.214	0.349	0.024	1.306	1.462
i	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
z_i	1.952	0.053	-0.208	-1.048	-0.11	0.736	-0.313	-0.158	1.37	1.208

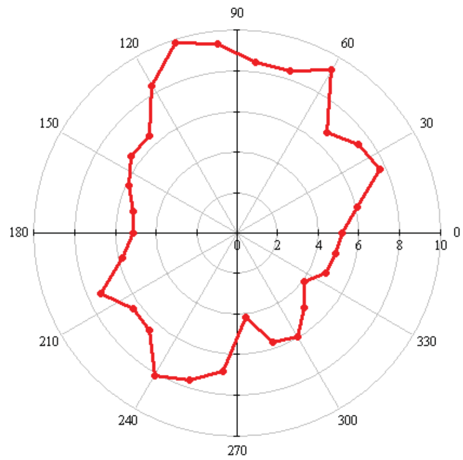
 ISSN 1562-9945

На рис. 1а показана траектория случайной последовательности из табл.2 в полярной системе координат. Значение полярного угла рассчитывается по формуле $\varphi_i = \Delta\varphi \cdot (i-1)$, где $\Delta\varphi = 2\pi / n$ - угол между точками. Значение полярного радиуса определяется по формуле $\rho(\varphi_i) = H + \Delta H(i)$, где $\Delta H(i) = z_i$, а $H = 2\sigma_z \approx 5$.

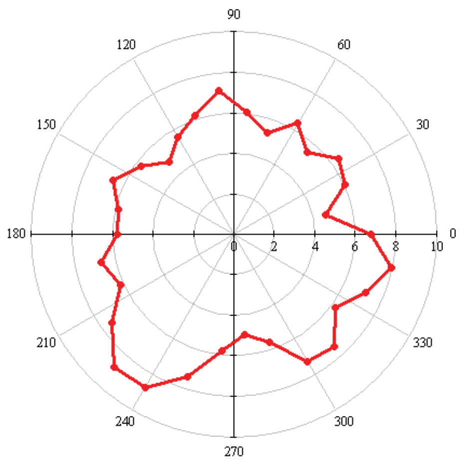
На рис 1. б-г показаны примеры траекторий иных реализаций замкнутых случайных последовательностей полученных при тех же значениях параметров.



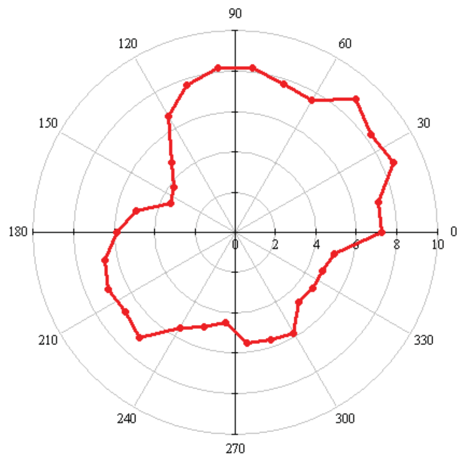
а)



б)



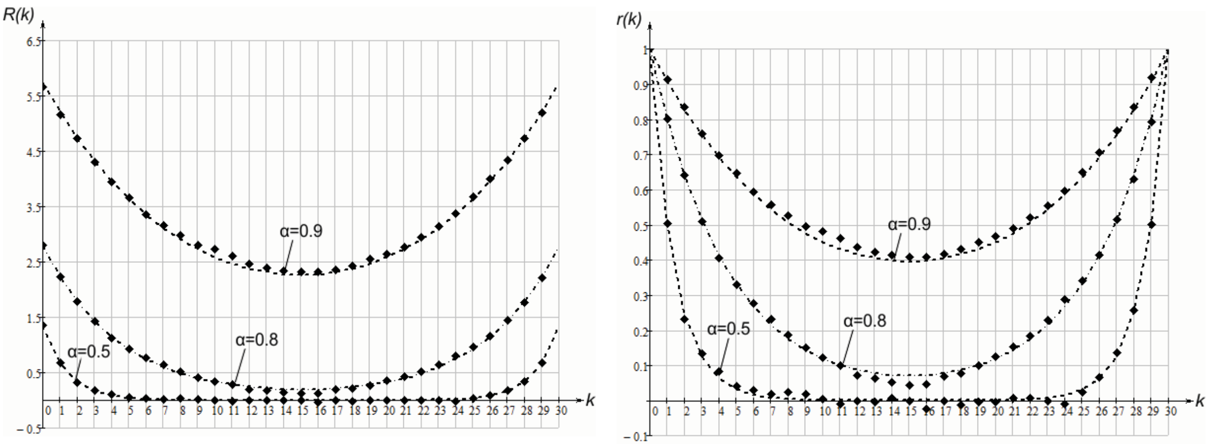
в)



г)

Рисунок -1 Примеры траекторий замкнутых случайных последовательностей

Для параметров $\delta = 1$, $m_\xi = 0$, $\sigma_\xi^2 = 1$ замкнутой последовательности выполнено сравнение расчетных значений коэффициентов ковариации и корреляции по формулам (18) и (23) со значениями, полученными на основе вычислительного эксперимента. Для этого по алгоритму (9) генерировалось N=10000 замкнутых последовательностей размером n=30 каждая. Для полученных выборок было зафиксировано сечение в точке i=1, после чего с шагом $k \in [0, n]$, $k \in \mathbb{N}$ вычислялся коэффициент ковариации и корреляции между 1-м и i+k-м сечениями. Результаты представлены в виде графика на рисунке 2 а-б, где точки – это выборочные значения коэффициентов, а штриховые линии соединяют точки, полученные расчетным путем по формулам.



а) б)

Рисунок 2 - Эмпирическая и теоретическая функция

а) ковариации; б) корреляции

Выводы

1. Предложен алгоритм формирования замкнутых автокоррелированных случайных последовательностей. Работоспособность алгоритма проверена на основе вычислительного эксперимента.
2. Исследованы основные свойства таких последовательностей с нормальным законом распределения: их дисперсии и функции автокорреляции зависят от размера выборки, причем автокорреляционная функция имеет минимум в точке $n/2$ и два максимума в точках k=1 и k=n-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малайчук В.П. Математическая дефектоскопия: Монография / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой.-Д.:Системные технологии, 2005. -180 с.
2. Кошулян А.В. Сингулярный спектральный анализ замкнутых пространственных рядов / А.В. Кошулян, В.П. Малайчук -Д.: Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 3 (74), 2011, с. 46-51.
3. Миллер Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах. / Б.М. Миллер, А.Р. Панков М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 320с., ил.; - Библиограф.: С. 310-312.
4. Robert M. Gray. Toeplitz and Circulant Matrices: A review / Department of Electrical Engineering of Stanford University; Now Publishers Inc: 2006 - ISBN-13: 978-1933019239.