УДК 519.8

В.М. Богомаз, І.В. Нечай

ПРО РЕГУЛЯРИЗАЦІЮ ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Анотація. В роботі досліджується проблема регуляризації обмежень в задачах векторної оптимізації з цільовими відображеннями, які мають ослаблену властивість напівнеперервності знизу та нетілесними впорядковуючими конусами. Введено ослаблене поняття регуляризаторів таких задач, для побудови яких залучаються ідеї векторної оптимізації. Отримано достатні умови існування ефективних регуляризаторів та наведено алгоритм їх побудови.

Вступ. На сьогоднішній день в багатьох практично важливих задачах керування нелінійними системами залучаються ідеї векторної оптимізації. В цій роботі розглядаються задачі векторної оптимізації з такими особливостями: цільове відображення має ослаблену властивість напівнеперервності знизу, впорядковуючий конус є нетілесним, складні обмеженння на керування та фазові змінні системи. Властивості цільового відображення та множини допустимих пар породжують нові вимоги до регулярності в таких задачах. В таких умовах неможна стверджувати, що множина допустимих пар в задачі векторної оптимізації є не порожньою. Отже, це вимагає розгляду вихідної задачі як нерегулярної. Таким чином, виникає потреба в розробці конструктивних методів регуляризації таких класів задач. При цьому, якщо задача має регулярні розв'язки (але апріорі ця інформація невідома), то при залученні алгоритма регуляризації, необхідно отримати регулярні розв'язки. Отже, регулярні задачі мають бути включеними до класу задач, які допускають регуляризовні розв'язки.

Регуляризація обмежень в скалярних задачах оптимізації розглядалась, наприклад, в роботі [5], де для знаходження регуляризаторів деяких обмежень розглядались задачі в скалярній постановці.

В цій роботі запропоновано поняття (Λ, μ)-регуляризатора системи обмежень, для знаходження якого залучається задача векторної

© Богомаз В.М., Нечай І.В., 2012

оптимізації, що розширює множину таких регуляризаторів і дає можливість більш досконало підійти до пошуку ефективних регуляризаторів множин. Але задачі векторної оптимізації, як правило, набагато складніші за скалярні, що призводить до необхідності дослідження питання існування ефективних регуляризаторів. Отже, основною метою цієї роботи є приведення умов, які гарантують існування ефективного (Λ,μ)-регуляризатора в розглянутому класі задач векторної оптимізації в банахових просторах та наведення алгоритму їх побудови.

Основні поняття та постановка задачі векторної оптимізації. Нехай U – банахів простір керувань, який є дуальним до деякого сепарабельного банахового простору. Нехай X є рефлексивним банаховим простором фазових змінних системи. Будемо вважати, що простір $U \times X$, як топологічний, наділений τ-топологією, в якості якої оберемо добуток *-слабкої топології в U та слабкої топології в X.

Нехай Ξ – непорожня підмножина простору $U \times X$. Нехай є заданим цільове відображення $I:\Xi \to Z$, де Z – рефлексивний банахів простір з нульовим елементом θ_Z, напіввпорядкований опуклим замкненим загостреним конусом Λ. Будемо вважати, що простір Z наділений μ-топологією, з якою будемо пов'язувати слабку топологію в ньому.

Позначимо частковий порядок в просторі Z, породжений конусом Λ, через $\leq_\Lambda$, що означає наступне:

$$z_1 \leq_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda, \quad z_1 <_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \Lambda \setminus \{\theta_Z\}.$$

Означення 2. [1] $(\Lambda, \tau\times\mu)$-нижньою границею відображення $I:U\times X \to Z$ в точці $(u^0,x^0)\in\Xi$ називається наступна множина:

$$\liminf^{\Lambda,\mu}_{(u_k,x_k)\xrightarrow{\tau}(u^0,x^0)} I(u,x) = \begin{cases} L^{\tau\times\mu}_{\min}(I,(u^0,x^0)), & L^{\tau\times\mu}_{\min}(I,(u^0,x^0)) \neq \varnothing, \\ \inf^{\Lambda,\mu} L^{\tau\times\mu}(I,(u^0,x^0)), & L^{\tau\times\mu}_{\min}(I,(u^0,x^0)) = \varnothing, \end{cases}$$

де $L^{\tau\times\mu}_{\min}(I,(u^0,x^0)) = L^{\tau\times\mu}(I,(u^0,x^0)) \cap \inf^{\Lambda,\mu} I(\Xi)$.

Означення 3. [1] Цільове відображення $I:U\times X \to Z$ називається секвенційно $(\Lambda,\tau\times\mu)$-напівнеперервним знизу в точці (u^0,x^0), якщо виконується умова $I(u^0,x^0) \in \liminf^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\xrightarrow{\tau}(u^0,x^0)} I(u,x)$.

Якщо ця властивість виконується в будь-якій точці $(u^0, x^0) \in \Xi$, то таке відображення називають $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервним знизу на Ξ.

Розглянемо таку задачу векторної оптимізації:

$$I(u,x) \to \inf{}^{\Lambda,\mu}, \tag{1.1}$$

$$(u,x) \in \Xi. \tag{1.2}$$

Означення 4. [1] Пара $(u^*, x^*) \in \Xi$ називається (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі (1.1) – (1.2), якщо виконується умова

$$(I(u^*, x^*) - \Lambda) \cap cl_\mu I(\Xi) = \{I(u^*, x^*)\}.$$

Множину всіх (Λ,μ)-ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.2) будемо позначати через $Eff_{\tau\times\mu}(\Xi; I; \Lambda)$, тобто

$$Eff_{\tau\times\mu}(\Xi; I; \Lambda) = \left\{(u,x) \in \Xi : I(u,x) \in \inf{}^{\Lambda,\mu} I(\Xi)\right\}.$$

Про регуляризацію обмежень в задачі векторної оптимізації. Припустимо, що множина допустимих пар Ξ включає в себе складні обмеження на керування та фазові змінні типу нерівностей та включення. Нехай виконуються умови: $\Xi = \Xi_1 \cap \Xi_2 = \varnothing$ та $\Xi_1 \neq \varnothing$. В такому випадку задача (1.1) – (1.2) втрачає сенс. Отже, необхідно перейти до іншої постановки задачі, яка б гарантувала знаходження ефективних розв'язків вихідної задачі на множині Ξ_1 (як правило, вона включає "жорсткі" обмеження, які не можна порушувати), які в свою чергу були б «близькими» в певному сенсі до множини обмежень Ξ_2.

Означення 5. Систему обмежень Ξ_2 будемо називати I_{Ξ_2}-регуляризовною ($I_{\Xi_2} : U \times X \to Z$ – векторнозначне відображення), якщо знайдеться така пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$, що $I_{\Xi_2}(u^*, x^*) \in \inf{}^{\Lambda,\mu}_{(u,x)\in\Xi_1} I_{\Xi_2}(u,x)$ та досяжною, якщо існує така пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$, що $I_{\Xi_2}(u^*, x^*) = \theta_Z$.

Розглянемо регуляризацію системи обмежень Ξ_2 в такому вигляді:

$$\Xi_2 = \left\{(u,x) \in U \times X : F(u,x) \leq_\Lambda \theta_Z\right\}, \tag{2.1}$$

де $F: U \times X \to Z$ – неперервне відображення відносно τ-топології в просторі $U \times X$ та μ-топології в просторі Z.

Введемо до розгляду оператор $\mu : Z \to Z$:

$$\mu(F) = | F(u,x) | + F(u,x). \tag{2.2}$$

Ясно, що оператор $\mu(F)$ задовольняє умовам:

а) $\mu(F) = \theta_Z$, якщо $(u,x) \in \Xi_2$;

б) $\mu(F) \geq_\Lambda \theta_Z$, якщо $(u,x) \in \Xi_2$.

Зауважимо, що внаслідок властивостей модуля та відображення $F: U \times X \to Z$ оператор $\mu(F)$ є неперервним відносно τ-топології в просторі $U \times X$ та μ-топології в просторі Z.

Розглянемо задачу векторної оптимізації:

$$\mu(F(u,x)) \to \inf{}^{\Lambda,\mu}, \tag{2.3}$$

$$(u,x) \in \Xi_1. \tag{2.4}$$

Зауваження 1. Якщо в задачі (2.3) – (2.4) в якості цільового відображення розглянути $F(u,x)$, то це може привести до того, що в множину $Eff_\mu(\Xi_1; F; \Lambda)$ можуть попасти як ті елементи, які задовольняють обмеженням (2.1), так і навпаки. В якості прикладу можна розглянути наступний. Нехай $Eff_\mu(\Xi_1; F; \Lambda) = \{(\tilde{u},\tilde{x}), (u^*, x^*)\}$ та $F(\tilde{u},\tilde{x}) = 2\sin x$, $F(u^*, x^*) = -1$. Легко бачити, що $(\tilde{u},\tilde{x}) \notin \Xi_2, (u^*, x^*) \in \Xi_2$, але $F(\tilde{u},\tilde{x}) \not\geq_\Lambda F(u^*, x^*)$. Це свідчить про необхідність використання оператора $\mu(F)$ для регуляризації системи обмежень Ξ_2.

Залучаючи теорему 3 з роботи [1], маємо такий результат.

Теорема 1. Нехай Ξ_1 є обмеженою τ-замкненою підмножиною простору $U \times X$. Нехай простір Z є напіввпорядкованим замкненим опуклим загостреним конусом Λ та цільове відображення $\mu : U \times X \to Z$ є неперервним відносно τ-топології в просторі $U \times X$ та μ-топології в просторі Z на множині Ξ_1. Тоді задача векторної оптимізації (2.3) – (2.4) є розв'язною та $Eff_\mu(\Xi_1; \mu; \Lambda) \neq \varnothing$.

 ISSN 1562-9945

Означення 6. Пару $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ будемо називати (Λ, μ)-регуляризатором множини Ξ_2, якщо виконується умова:

$$\mu(F(u^*, x^*)) \in \inf\nolimits_{(u,x)\in\Xi_1}^{\Lambda,\mu} \mu(F(u,x)).$$

Позначимо сукупність всіх регуляризаторів множини Ξ_2 через $\Re$. Взявши до уваги означення 6, маємо: множина $\Re$ співпадає з множиною (Λ, μ)-ефективних розв'язків задачі (2.3) – (2.4).

Означення 7. (Λ, μ)-регуляризатор $(\tilde{u}, \tilde{x}) \in \Xi_1$ множини Ξ_2 будемо називати ефективним, якщо виконується умова:

$$I(\tilde{u}, \tilde{x}) \ngeq_\Lambda I(u,x), \ \forall (u,x) \in \Re. \tag{2.5}$$

Нехай елемент y є довільним елементом множини $\inf\nolimits_{(u,x)\in\Xi_1}^{\Lambda,\mu} \mu(F(u,x))$. Для знаходження такого елемента можна скористатись відомим результатом.

Теорема 2. [2] Нехай U, X, Z - банахові простори та множина Ξ_1 є непорожньою множиною простору $U \times X$. Нехай $I : \Xi_1 \to Z$ – задане цільове відображення (не обов'язково $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервне знизу). Якщо існує така пара $(u^*, x^*) \in \Xi_1$ та елемент $\lambda \in \Lambda_0^*$, що виконується умова:

$$(u^*, x^*) \in Arg \min_{(u,x)\in\Xi_1} \left\langle \lambda, I(u,x) \right\rangle_{Z^*;Z},$$

то $(u^*, x^*) \in Eff_{\tau\times\mu}(\Xi_1; I; \Lambda)$.

Введемо до розгляду відображення $\beta : Z \to R$ наступного вигляду:

$$\beta(\mu) = \inf_{\substack{y=\mu(F(\hat{u},\hat{x})) \\ (\hat{u},\hat{x})\in\Re}} \left\| \mu(F(u,x)) - y \right\|_Z. \tag{2.6}$$

Приведемо без доведення відомий результат [3].

Теорема 3. Нехай V є банаховим простором та $Z = V^*$. Якщо $u_k \to u$ слабко в просторі Z, то виконуються такі умови:

1) послідовність $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в Z;

2) $\liminf\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_Z \ge \|u\|_Z$, тобто норма є напівнеперервною знизу відносно топології слабкої збіжності в просторі Z.

Враховуючи властивість неперервності відображення $(u,x) \mapsto \mu(F(u,x))$ відносно τ-топології в просторі $U \times X$ та μ-топології в просторі Z та залучаючи теорему 3, маємо: відображення $\beta(\mu)$ є напівнеперервним знизу відносно τ-топології в просторі $U \times X$.

Для знаходження ефективних (Λ,μ)-регуляризаторів множини Ξ_2 пропонується розглянути наступну послідовність задач векторної оптимізації зі «штрафом»:

$$I_\varepsilon(u,x) = I(u,x) + \varepsilon^{-1}\beta(\mu)b \to \inf{}^{\Lambda,\mu}, \tag{2.7}$$

$$(u,x) \in \Xi_1. \tag{2.8}$$

Залучаючи результати, отримані в роботі [4], та проводячи аналогічні дослідження, маємо наступний результат:

Теорема 4. Нехай U, X, Z - банахові простори та множина Ξ_1 є непорожньою τ-компактною множиною простору $U \times X$. Нехай $I : \Xi_1 \to Z$ задане $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервне знизу цільове відображення та $\beta : \Xi_1 \to R$ секвенційно напівнеперервне знизу відносно τ-топології простору $U \times X$. Нехай простір Z частково впорядковано опуклим замкненим загостреним конусом Λ. Тоді задача (1.1) – (1.2) має непорожню множину ефективних (Λ,μ)-регуляризаторів множини Ξ_2.

За аналогією з вищеприведеними результатами, для регуляризації обмежень типу $(u,x) \in \Xi_2$ достатньо залучити неперервний оператор $\mu : \Xi_1 \to Z$, який задовольняє умовам:

а) $\mu(u,x) = \theta_Z$, якщо $(u,x) \in \Xi_2$;

б) $\mu(u,x) \geq_\Lambda \theta_Z$, якщо $(u,x) \in \Xi_2$;

Для знаходження ефективних (Λ,μ)-регуляризаторів в задачі (1.1) – (1.2) необхідно розглянути послідовність задач (2.7) – (2.8) при $\varepsilon \to 0$.

Висновки. Для задач векторної оптимізації з $(\Lambda, \tau \times \mu)$-напівнеперервним знизу цільовим відображенням та нетілесним впорядковуючим конусом запропоновано метод регуляризації обмежень типу нерівностей та включень. Введено поняття (Λ,μ)-регуляризатора системи обмежень. Приведені умови, які гарантують існування ефективного (Λ, μ)-регуляризатора в розглянутому класі задач, наведено алгоритм їх побудови.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kogut P.I. On the existence of efficient solutions of vector optimization problems in Banach spaces / P.I. Kogut, R. Manzo, I.V. Nechay// Диференціальні рівняння та їх застосування. – 2008 - № 5 – с. 105 - 121.
2. Kogut P.I. Topological Aspects of Scalarization in Vector Optimization Problems / P.I. Kogut, R. Manzo, I.V. Nechay// Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2010 – 7(2) – с. 25-49.
3. Когут О.П. Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах / О.П. Когут, П.И. Когут, Рядно О.А.// Монографія. – Дніпропетровськ: ДДФА, 2010.-236с.
4. Нечай І.В. Про розв’язність і регуляризацію задач не скалярної оптимізації в банахових просторах: дис. канд. фіз..-мат. наук:01.05.01/Нечай Ігор Вікторович. Дніпропетровськ, 2009. – 137с.
5. Иваненко В.И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В.И. Іваненко, Мельник В.С.// – Київ: Наук. думка, 1988. - 288с