УДК 620.179

В.П. Малайчук, А.И. Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАРКОВСКИХ ГАММА-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация. Предложены и исследованы алгоритмы моделирования нестационарных и стационарных выборок марковских случайных величин с гамма-законом распределения их плотности вероятности.

Ключевые слова: марковский процесс, гамма-последовательность, автокорреляция.

Постановка задачи. В задачах периодического неразрушающего контроля находящихся в эксплуатации линейно протяжных объектов измеряемые параметры, содержащие информацию о их состоянии, являются случайными величинами, статистические закономерности которых зависят от координат точек измерения. По своей физической природе эти параметры положительные, их законы распределения вероятностей несимметричны и марковские гауссовы последовательности не могут быть использованы в качестве их моделей. Рассмотрим разностное уравнение формирования марковских последовательностей

$$S(k) = \alpha S(k-1) + \beta U(k), \tag{1}$$

где $U(k)$ - независимые случайные величины с экспоненциальным распределением, единичным математическим ожидание и единичной дисперсией (экспоненциальный белый шум).

Решение уравнения (1) известно и запишется в виде

$$S(k) = \beta \sum_{i=1}^{k} \alpha^{k-i} U(i), \tag{2}$$

где β - энергетический параметр последовательности $S(k)$.

Здесь $S(k)$, как взвешенная сумма экспоненциальных случайных величин, описывается гамма-распределением. Исследуем статистические закономерности выборок $S(k)$, которые, как следует из (2), представляют собой дискретные марковские гамма-последовательности случайных величин. Их параметры зависят от

 ISSN 1562-9945

координат точек измерения. Исследование имеет своей целью определение этих зависимостей и статистический анализ марковских гамма-последоваетельностей по выборкам случайных величин генератора, программно реализованного в соответствии с разностным уравнением (1).

Исследование сдвига, масштаба и автокорреляции. Учитывая что математическое ожидание $M\left[U(k)\right]$ и дисперсия $D\left[U(k)\right]$ равны единицы, из (2) следует

$$M\left[S(k)\right] = \frac{\beta(1-\alpha^k)}{1-\alpha},\ D\left[S(k)\right] = \frac{\beta^2(1-\alpha^{2k})}{1-\alpha^2}. \qquad (3)$$

Коэффициент автокорреляции двух соседних измерений $S(k)$ и $S(k-1)$ легко определяется и равен

$$r(k) = \alpha\sqrt{\frac{1-\alpha^{2(k-1)}}{1-\alpha^{2k}}},\ k \geq 2. \qquad (4)$$

Как следует из анализа выражений (3) и (4), марковский дискретный гамма-процесс – это последовательность коррелированных случайных величин с нелинейными трендами математических ожиданий, дисперсий и коэффициентов автокорреляции. При больших значениях k $(k \to \infty)$ процесс почти стационарный. Это марковская гамма-последовательность с математическим ожиданием, дисперсией и коэффициентом корреляции

$$M\left[S\right] = \frac{\beta}{1-\alpha},\ D\left[S\right] = \frac{\beta^2}{1-\alpha^2},\ r = \alpha. \qquad (5)$$

Границу между нестационарным и стационарным участками последовательности можно оценить, решив неравенство

$$\frac{M - M(k)}{M} = \sqrt{\frac{D - D(k)}{D}} = \alpha^k \leq 10^{-2}. \qquad (6)$$

В результате получим условие стационарности: если выполняется неравенство

$$k \geq \frac{2}{\lg\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{2}{1-\lg\left(10\alpha\right)} = k_c, \qquad (7)$$

то значения $S(k)$ при $k \geq k_c$ представляют собой стационарную гамма-последовательность Маркова.

Графики изменений сдвига $M[k]$, масштаба $D[k]$, коэффициента корреляции $r[k]$ представлены на рисунках 1 и 2. И граничного значения стационарности $k_c(\alpha)$ - на рисунке 3.

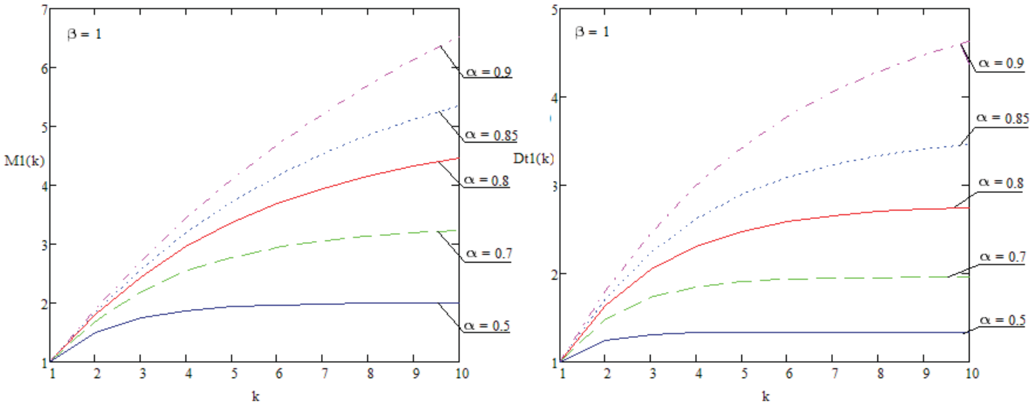

Рисунок 1 - Графики зависимости математического ожидания и дисперсии нестационарной гамма-последовательности Маркова от значений параметра α

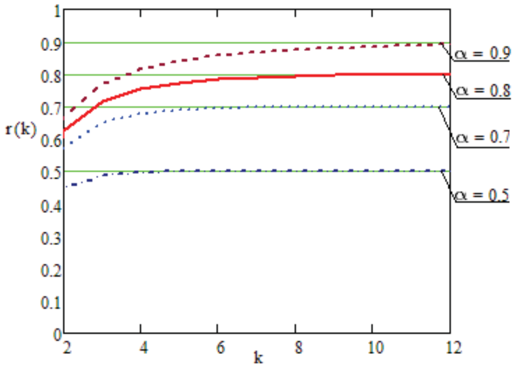

Рисунок 2 – Графики зависимости коэффициента автокорреляции нестационарной гамма-последовательности

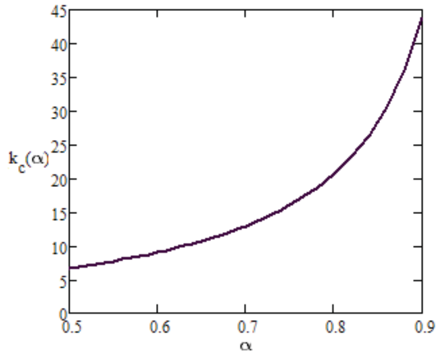

Рисунок 3 – Зависимость граничного значения коэффициента стационарности от α

Разностное уравнение (1) описывает нестационарную последовательность, у которой изменяются как показатель сдвига $M[k]$, так и показатель масштаба $D[k]$. Чтобы моделировать однопараметрические гамма-последовательности, или когда только постоянна дисперсия, или постоянно только математическое ожидание, или постоянна мощность необходимо выбирать коэффициент β следующим образом:

1) при постоянной дисперсии $D[k] = D$

$$\beta(k) = \sqrt{\frac{D(1-\alpha^2)}{1-\alpha^{2k}}}, \qquad M[S(k)] = \sqrt{\frac{D(1+\alpha)(1-\alpha^k)}{(1-\alpha)(1+\alpha^k)}}, \tag{8}$$

 ISSN 1562-9945

2) при постоянном математическом ожидании $M[k]=M$

$$\beta(k)=\frac{M(1-\alpha)}{1-\alpha^k}, \qquad D[S(k)]=\frac{M^2(1-\alpha)(1+\alpha^k)}{(1+\alpha)(1-\alpha^k)}, \tag{9}$$

3) при постоянной мощности P

$$\beta^2(k)=\frac{P(1-\alpha)(1-\alpha^2)}{2\left(1-\alpha^k\right)(1-\alpha^{k+1})}, \tag{10}$$

$$M[S(k)]=\sqrt{\frac{P(1+\alpha)(1-\alpha^k)}{2(1-\alpha^{k+1})}}, \quad D[S(k)]=\frac{P(1-\alpha)(1+\alpha^k)}{2(1-\alpha^{k+1})} \tag{11}$$

Таким образом, путем выбора коэффициентов β и $\beta(k)$ в соответствии с (8), (9) или (10), разностное уравнение (1) можно использовать для моделирования дискретных двухпараметрических или однопараметрических нестационарных и стационарных автокоррелированных гамма-последовательностей.

Ожидается, что одномерный закон распределения вероятности $W(S_k)$ в последовательности $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$ - это гамма-распределения с параметрами γ_k и λ_k, зависящее от α, β и номера последовательности

$$W(S_k)=\frac{S_k^{\gamma_k-1}}{\lambda_k^{\gamma_k}\Gamma(\gamma_k)}\exp\left(-\frac{S_k}{\lambda_k}\right), \tag{12}$$

$$\lambda_k=\frac{\beta(1+\alpha^k)}{1+\alpha}, \quad \gamma_k=\frac{(1+\alpha)(1-\alpha^k)}{(1-\alpha)(1+\alpha^k)}.$$

На стационарных участках параметры гамма-последовательности равны

$$\lambda=\frac{\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Вычислительные эксперименты. Используя генератор экспоненциальных случайных величин с параметром $\lambda=1$ и разностное уравнение (1), моделировались выборки $S(1), S(2), \dots, S(k), \dots, S(n)$, проводился их статистический анализ, оценивались параметры и законы распределения вероятностей.

На рис. 3 представлены фрагменты нестационарной и стационарной гамма-последовательности. Математическое ожидание и дисперсия стационарного участка равны $MO=5$, $D=2,778$ соответственно.

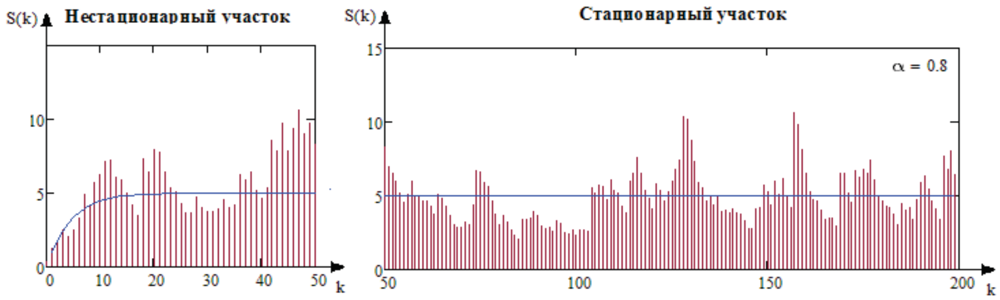

Рисунок 4 – Пример марковской гамма-посделовательности

($MO^{*} = 4{,}89$, $D^{*} = 2{,}598$)

Так же моделировались однопараметрические гамма-последовательности, параметры которых описаны формулами (8), (9), (10), (11). На рисунке 4 представлены фрагменты однопараметрических марковских гамма-последовательностей: а) последовательность при постоянном математическом ожидании ($MO = 4$); б) – при постоянной дисперсии ($D = 2$); в)– при постоянной мощности ($P = 18$). Коэффициент α во всех трех случаях одинаковый и равен $\alpha = 0.8$.

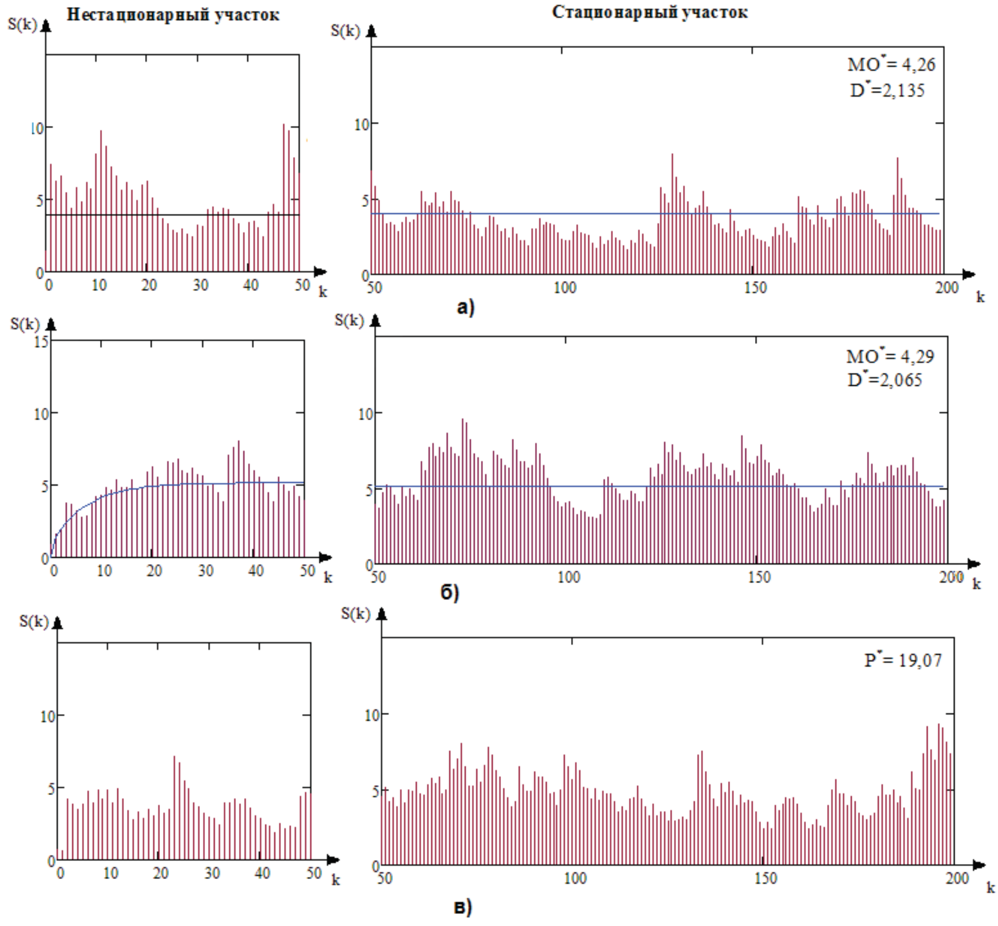

Рисунок 5 – Однопараметрические марковские гамма-посделовательности (фрагменты выборок) (MO*, D*, P* - оценки математического ожидания, дисперсии и мощности)

Выводы

1. Предложена математическая модель формирование нестационарных и стационарных дискретных марковских гамма-последовательностей случаных величин с помощью линейного цифрового фильтра, возбуждающего последовательностью независимых случайных величин с экспоненциальным законом распределения вероятностей.

2. Получены аналитические выражения для определения математического ожидания, дисперсии, коэффициента корреляции по заданным параметрам формирующих фильтров на нестационарном и стационарном участках двух параметрических и однопараметрических гамма-последовательностях.

3. Программно реализована компьютерная модель генератора марковских гамма-последовательностей и проведен статистический анализ выборок случайных величин; их оценки подтверждают работоспособность предложенного алгоритма формирования марковских гамма-последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика/ А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2006. – 816 с.
2. Малайчук В.П., Мозговой А.В. Математическая дефектоскопия: Монография.–Днепропетровск:Системные технологии, 2005,-180 с.