

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРІВ КРИВИНИ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ

Анотація. Визначається область можливого розташування центрів кривини, які відповідають вихідним вузлам дискретно представленої кривої з монотонною зміною кривини.

Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК), монотонна зміна кривини, стичне коло, радіус кривини, нормаль, центр кривини.

Постановка проблеми. При формуванні обводу з монотонною зміною кривини, у точках вихідного ряду призначаються дотичні і значення кривини. Призначаючи зазначені характеристики необхідно враховувати, що вони взаємозалежні і повинні відповідати один одному.

Положення дотичних до обводу та значення радіусів кривини однозначно визначаються положенням центрів відповідних стичних кіл – центрів кривини. Таким чином проблему можливо звести до визначення області розташування центрів кривини, при яких задача формування обводу має розв'язок.

Найбільш ефективний шлях розв'язку цієї задачі, полягає у визначенні діапазонів положення центрів кривини, що враховують всю область можливого розв'язку, і вибір, усередині цих діапазонів, області оптимального розв'язку.

Аналіз останніх досліджень. Найближчими по темі роботами, де досліджувана можливість формування обводів з монотонною зміною кривини, є [1,2,3].

У роботі [1] розроблений метод формування обводів шляхом згущення вихідного точкового ряду, якій дозволяє визначити область можливого розташування точок згущення. Положення дотичних до обводу, що формується, заздалегідь не визначається та уточнюється в процесі послідовних згущень. У результаті згущень формується обвід

другого порядку гладкості, із заздалегідь призначеними значеннями кривини у вузлах.

У роботі [2] запропонований алгоритм формування обводу з монотонною зміною кривини з використанням дотичних. Точки згущення призначаються усередині базисних трикутників, утворених хордою, що з'єднує два послідовних вихідних вузли та дотичними до обводу в цих вузлах. Алгоритм згущення точкового ряду дозволяє призначати положення дотичних до обводу в точках згущення, при яких задача має розв'язок.

В роботі [3] запропоновані умови, до стичних кіл у вузлах вихідної ДПК з монотонною зміною кривини.

Умова 1. Всі вузли в яких значення радіусів кривини менше, ніж в i -му вузлі, повинні бути розташовані у середині i -го стичного кола.

Умова 2. Стичні кола меншого радіусу повинні розташуватися всередині стичного кола більшого радіусу без перетинань.

Умова 3. Стичні кола, які відповідають сусіднім вихідним вузлам, повинні бути розташовані таким чином, щоб можливо було призначити коло, дотичне до обох стичних кіл в точках, які розташовані між вказаними вузлами.

Умови, запропоновані в [3] дозволяють встановити відповідність розташування стичних кіл, призначених у вихідних вузлах, вимогам до обводу, що конструюється.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою статті є розробка способу визначення області можливого розташування центрів кривини, які відповідають вузлам вихідної ДПК з монотонною зміною кривини.

Основна частина. Стичне коло, назначене у вузлі, повністю визначається положенням свого центра – центра кривини (C_i).

Визначимо діапазон усередині якого може бути призначена точка C_i при формуванні обводу з монотонною зміною кривини. Для цього необхідно визначити:

- крайні положення, які може займати нормаль до обводу, що формується, призначена в i -му вузлі (n_i);
- відрізок нормалі, усередині якого може бути призначена точка C_i .

Розглянемо нормаль n_i призначену так, щоб вона проходила через центр кола, що обумовлено вузлами $i-1, i, i+1$.

Таке коло будемо називати прилягаючим та позначати $ПК_i$ – по номеру середньої, з визначаючих коло точок.

При зазначеному положенні нормалі єдино можливе положення точки C_i – центр $ПК_i$ ($Ц_i$).

Дійсно, якщо збільшити радіус $СК_i$ (R_i), то вузол $i+1$ опиниться усередині $СК_i$, а при зменшенні R_i вузол $i-1$ виявляється за межами $СК_i$, тобто порушується умова 1 розташування стичного кола (далі просто *умова - 1*).

При повороті n_i навколо вузла i проти годинникової стрілки, щодо положення, коли n_i проходить через центр $ПК_i$, вузол $i-1$ виявляється за межами $СК_i$, а вузол $i+1$ – усередині $СК_i$ (див. рис. 1).

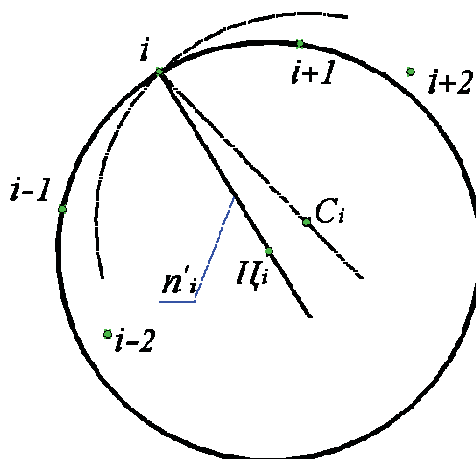


Рисунок 1

Зміною значення R_i домогтися одночасного виконання умови розташування вузла $i-1$ усередині $СК_i$, а вузла $i+1$ за його межами неможливо.

Отже, положення n_i , коли нормаль проходить через центр $ПК_i$, є крайнім, максимально поверненим проти годинникової стрілки положенням, при якому формування обводу з монотонною зміною кривини має розв'язок.

Позначимо таке положення нормалі n'_i .

При положенні нормалі n'_i радіус кривини R_i приймає єдино можливе значення – значення радіуса $ПК_i$, а ділянка обводу ($i-1; i+1$) повинна бути сформованою дугою цього кола.

Поворот n_i за годинниковою стрілкою, щодо положення n'_i дозволить як зменшувати, так і збільшувати значення R_i щодо радіуса $ПК_i$.

Розглянемо можливість формування обводу з монотонною зміною кривини, коли нормаль n_i проходить через центр $ПК_{i-1}$ – точку $Ц_{i-1}$

Якщо значення R_i призначити меншим чим радіус $ПК_{i-1}$, то точки $i-1$ та $i-2$ виявляться за межами $СК_i$ (див.рис. 2).

У цьому випадку не виконується *умова-1* і обвід з монотонною зміною кривини сформуванати неможливо.

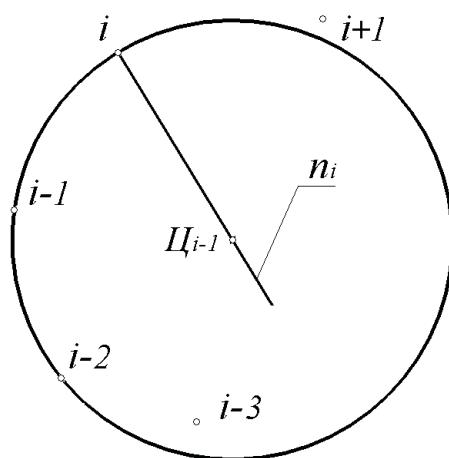


Рисунок 2

Якщо значення R_i призначити більшим радіуса $ПК_{i-1}$, то *умова-1* буде виконана. Однак, при розташуванні центра $СК_i$ на прямій n_i , яка проходить через точку $Ц_{i-1}$, виконання *умови -3* неможливо. Коло, дотичне із $СК_i$ у вузлі i , може мати дотик із $СК_{i-1}$ тільки в точці, розташованій за вузлом $i-1$.

При будь-якому повторі нормалі n_i за годинниковою стрілкою відносно положення, коли n_i проходить через точку $Ц_{i-1}$, *умова-3* також нездійсненна.

Отже, положення n_i , коли нормаль проходить через центр $ПК_{i-1}$ є крайнім, максимально поверненим за годинниковою стрілкою положенням, при якому задача формування обводу з монотонною зміною кривини на ділянці $(i-2;i)$ має розв'язок. При такому положенні нормалі n_i радіус R_i приймає єдино можливе значення – значення радіуса $ПК_{i-1}$. Це значення є мінімальним із всіх можливих за умовою задачі значень R_i . У розглянутому випадку ділянка обводу $(i-2;i)$ повинна бути сформована дугою $ПК_{i-1}$.

Поворот n_i проти годинникової стрілки та збільшення значення R_i до величини, коли вузол $i-1$ виявиться усередині СК $_i$, дозволяє формувати обвід з монотонною зміною кривини на ділянці ДПК ($i-2;i$).

Здійснивши аналіз можливості формування обводу з монотонною зміною кривини, коли нормаль n_i проходить через центр ПК $_{i+1}$ (коло, що проходить через точки $i;i+1;i+2$) і міркуючи аналогічно випадку проходження n_i через центр ПК $_{i-1}$, можна зробити наступні висновки.

- Зазначене положення прямих n_i є крайнім, максимально поверненим за годинниковою стрілкою положенням нормалі, обумовленим положенням вузлів $i; i+1; i+2$.

- При зазначеному положенні нормалі n_i єдине можливе значення R_i дорівнює радіусу ПК $_{i+1}$. Це значення R_i є максимальним із всіх можливих, при яких задача має рішення.

- У випадку проходження нормалі n_i через центр ПК $_{i+1}$, ділянка обводу ($i; i+2$) повинна бути сформована дугою цього кола.

Таким чином, розташування вузлів вихідного точкового ряду визначає два крайніх, повернутих за годинниковою стрілкою, положення нормалі n_i :

- положення, при якому n_i проходить через центр ПК $_{i-1}$ – визначається вузлами $i-2, i-1, i$;

- положення, при якому n_i проходить через центр ПК $_{i+1}$ – визначається вузлами, $i, i+1, i+2$.

Зрівнявши зазначені положення прямих n_i , і вибравши менш повернене за годинниковою стрілкою, ми визначаємо граничне положення нормалі при якому задача формування обводу з монотонною зміною кривини має розв'язок. Позначимо таке положення нормалі $'n_i$.

Два крайніх положення нормалі до обводу, що формується, в i -м вузлі: повернене за годинниковою стрілкою – $'n_i$, та повернене проти годинникової стрілки – n'_i , визначають границі сектора, усередині якого може бути призначена нормаль n_i .

Отримані залежності положення нормалі та радіуса кривини, призначуваних в i -м вузлі, від розташування вузлів вихідної ДПК

дозволяє визначити область можливого положення центра кривини C_i (див. рис. 3).

На рисунку область можливого розташування C_i – зафарбований трикутник. Будемо називати цей трикутник – трикутник центрів кривини.

Трикутник обмежений прямими лініями:

- прямою l_1 , що проходить через центр ПК $_{i-1}$ (Π_{i-1}) і центр ПК $_i$ (Π_i). Пряма l_1 може бути визначена як перпендикуляр до хорди $[i-1; i]$, що проходить через її середину;

- прямою l_2 , що проходить через центр ПК $_{i+1}$ (Π_{i+1}) і центр ПК $_i$. Пряма l_2 може бути визначена як перпендикуляр до хорди $[i; i+1]$, що проходить через її середину;

- прямою $'n_i$.

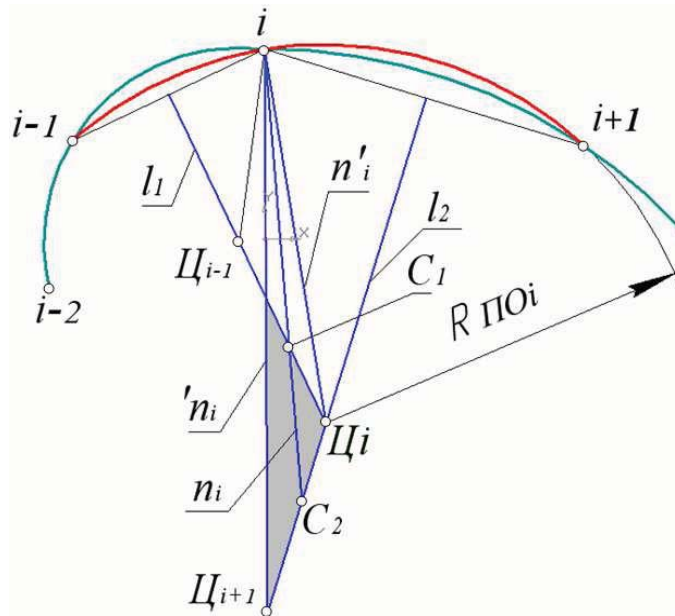


Рисунок 3

На рисунку пряма $'n_i$ проходить через точки i і Π_{i+1} . Можливе розташування вихідних вузлів, при якому $'n_i$ буде проходити через точки i і Π_{i-1} .

Вершинами трикутника центрів кривини є точки Π_i , Π_{i+1} і точка перетинання прямих l_1 і $'n_i$, або точки Π_i , Π_{i-1} і точка перетинання прямих l_2 і $'n_i$.

Як вже було відзначено, у випадку коли нормаль n_i займає крайні положення – $'n_i$ або n'_i , центр кривини C_i збігається із центром відповідного ПК – Π_{i+1} (Π_{i-1}) або Π_i . Якщо нормаль n_i займає

проміжне положення, то C_i розташовується усередині відрізка $[C_1; C_2]$, обмеженого точками перетинання n_i із прямими l_1 і l_2 , відповідно.

У випадку, коли центр кривини C_i збігається із точкою C_1 , ділянка обводу $(i; i-1)$ буде сформована дугою кола, зістикованою із сусідніми ділянками з першим або другим порядком гладкості. Аналогічно, якщо C_i збігається із точкою C_2 , дугою кола буде сформована ділянка $(i; i+1)$.

Необхідною умовою формування обводу з монотонною зміною кривини є розташування C_i усередині відрізка $[C_1; C_2]$.

При призначенні C_i в точках C_1 або C_2 сформувати відповідні ділянки обводу зі значеннями кривини, що змінюються, можливо тільки при порушенні монотонності зміни її значень.

Висновки та перспективи подальших досліджень. На підставі проведених досліджень запропоновано простий спосіб розв'язку задачі визначення області можливого розташування центрів кривини вихідної ДПК. Запропонований спосіб ґрунтується на аналізі вихідного точкового ряду, не потребує складних розрахунків та дозволяє визначити всю область можливого, за умовами задачі, розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны / Е.А. Гавриленко // Дис.канд.техн.наук. – Мелітополь, 2004 – 182 с.
2. Гавриленко Є.А. Аналіз вихідного точкового ряду на можливість формування, на його основі, обводу з монотонною зміною кривини / Є.А. Гавриленко // Прикл геом.та інж. Графіка / Праці ТДАТА – Вип.4,Т.32.–Мелітополь 2006.– с. 94-98.
3. Гавриленко Є.А. Умови розташування стичних кіл при формуванні обводу з монотонною зміною кривини / Є.А. Гавриленко // Прикл геом.та інж. Графіка / Праці ТДАТА – Вип.4,Т.50.–Мелітополь 2011.– с. 146-150.