УДК 519.24:681

А.В. Кошулян, В.П. Малайчук

КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ С ЗАДАННЫМ ИНТЕРВАЛОМ ДОПУСКА ПО МОДИФИЦИРОВАННОМУ КРИТЕРИЮ НЕЙМАНА-ПИРСОНА

Аннотация. Рассмотрена задача оптимального контроля качества изделий по параметру, который представляет собой случайную величину и для которого задан интервал допуска. Предлагается для партии однотипных изделий выбирать пороги контроля таким образом, чтобы минимизировать условную вероятность перебраковки при ограничении, что условная вероятность пропуска брака не должна превышать задаваемую критическую величину.

Ключевые слова: контроль качества, допуск, пропуск брака, перебраковка, критерий Неймана-Пирсона.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу контроля качества партии однотипных изделий по некоторому параметру, обозначенному H. Данный параметр является случайной величиной, так как для различных изделий из партии он может принимать то, или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Для контролируемого параметра H задано требование в виде интервала допуска – граничных значений H_1 и H_2. Параметр H и интервал допуска (H_1, H_2) определяют состояние изделий. Изделия, для которых значение параметра H удовлетворяет неравенству $H_1 \le H \le H_2$, считаются в норме, в противном случае, если $H < H_1$ или $H > H_2$, изделия являются бракованными. Эти показатели характеризуют технологию производства.

Истинное значение параметра H неизвестно, однако может быть оценено путем измерений. В результате измерений параметра H можно рассчитать его оценку $\overline{X}$. Оценка может быть средним значением измерений. Решение о состоянии изделия принимается не по значению параметра H, которое неизвестно, а по значению его оценки $\overline{X}$. Для контроля состояния изделий нужно выбрать пороги контроля

© Кошулян А.В., Малайчук В.П., 2011

H_1^* и H_2^*. В этом случае решение, что изделие в норме, будет приниматься, если для значения оценки $\overline{X}$ выполняется неравенство $H_1^* \le \overline{X} \le H_2^*$, иначе будет приниматься решение, что изделие бракованное.

Изделия, поступающие на контроль, могут находиться в состоянии нормы N или в состоянии брака (не норма) $\bar{N}$, а решения по результатам измерений $\overline{X}$ могут приниматься как норма N^* или брак (не норма) $\bar{N}^*$. Как состояния N и $\bar{N}$, так и решения N^* и $\bar{N}^*$ являются случайными событиями. В рассматриваемом случае результаты контроля представляют собой сложные события распознавания, состоящие из сочетания двух событий: NN^*, $N\bar{N}^*$, $\bar{N}\bar{N}^*$, $\bar{N}N^*$. Из них два сложных события $N\bar{N}^*$ и $\bar{N}N^*$ - это ошибочные решения контроля: перебраковка (когда годное изделие распознается как бракованное) и пропуск брака (когда бракованное изделие распознается как годное). Указанные сложные события можно представить в виде прямоугольных областей на плоскости, при этом вероятностями данных сложных событий будут вероятности попадания случайной точки с координатами $\left(\overline{X}, H\right)$ в данные области (рисунок 1).

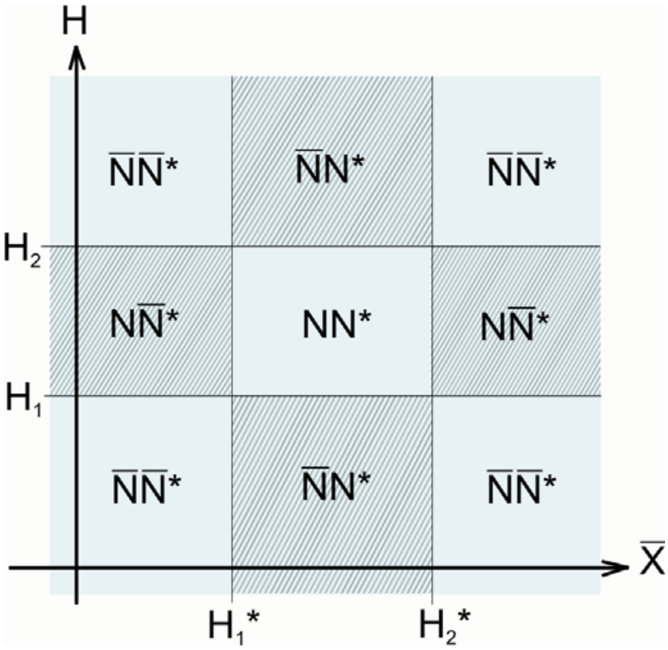

Рисунок 1 - Множество возможных сложных событий распознавания, соответствующих ошибочным и правильным решениям

Из рисунка 1 видно, что если сужать пороги контроля H_1^* и H_2^*, то вероятность пропуска брака будет уменьшаться, однако вероятность перебраковки – возрастать. Расширение порогов приведет к обратному эффекту. При этом, как видно, нельзя добиться одновременного уменьшения вероятностей пропуска брака и перебраковки. Таким образом, вероятности ошибочного распознавания являются функциями от порогов контроля $P\left(\overline{N}N^*\right) = P_{\overline{N}N^*}\left(H_1^*, H_2^*\right)$, $P\left(N\overline{N}^*\right) = P_{N\overline{N}^*}\left(H_1^*, H_2^*\right)$ и представляется возможным выбирать пороги контроля оптимальным образом, исходя из того, какое ошибочное решение является критичным для изделий того или иного класса.

Эффективность контроля зависит от условных вероятностей ошибочных решений: $P\left(N^* / \overline{N}\right)$ - условной вероятности пропуска брака и $P\left(\overline{N}^* / N\right)$ - условной вероятности перебраковки. Данные вероятности представляют собой вероятности ошибочных решений при условии контроля соответственно только бракованных или только годных изделий из партии и могут быть выражены через $P\left(\overline{N}N^*\right)$ и $P\left(N\overline{N}^*\right)$. В [1] приведен критерий минимизирующий сумму условных вероятностей ошибочных решений $P\left(N^* / \overline{N}\right) + P\left(\overline{N}^* / N\right)$, однако его применение не гарантирует, что одна из двух вероятностей, составляющая сумму, не превысит критическую для того или иного производства величину. Актуальной задачей является выбор порогов контроля H_1^* и H_2^* таким образом, чтобы обеспечить минимальную величину условной вероятности перебраковки, при условии, что условная вероятность пропуска брака не превысит некоторого критического значения P_0. Решающее правило распознавания при таком выборе порогов контроля соответствует модифицированному критерию Неймана-Пирсона.

Уравнения оптимальности

Условные вероятности ошибочных решений можно записать через безусловные вероятности[2]:

 ISSN 1562-9945

$$P\left(\overline{N}^{*} / N\right) = 1 - P\left(N^{*} / N\right) = 1 - \frac{P\left(NN^{*}\right)}{P\left(N\right)},$$

$$P\left(N^{*} / \overline{N}\right) = \frac{P\left(N^{*}\right) - P\left(NN^{*}\right)}{1 - P\left(N\right)},$$

где $P\left(N\right)$ - вероятность производственной нормы; $P\left(N^{*}\right)$ - вероятность решения «норма»; $P\left(NN^{*}\right)$ – вероятность правильного решения «норма».

Рассмотрим случай, когда законы распределения вероятностей параметра и его оценки абсолютно непрерывные и известны их плотности $W(H)$ и $W(\overline{X} / H)$, которые также всюду непрерывные. В этом случае может быть найдена двумерная плотность распределения параметра и оценки, двумерная функция распределения, а также плотность распределения оценки $W(\overline{X})$

$$W(\overline{X}, H) = W(H) W(\overline{X} / H), \quad F(x,h) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{h} W(\overline{X}, H) dH d\overline{X},$$

$$W(\overline{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\overline{X}, H) dH \,.(1)$$

С учетом этого, можно определить следующие вероятности [2]

$$P\left(N\right) = \int_{H_1}^{H_2} W(H) dH = F_H\left(H_2\right) - F_H\left(H_1\right),$$

$$P\left(N^{*}\right) = \int_{H_1^{*}}^{H_2^{*}} W(\overline{X}) d\overline{X} = F_{\overline{X}}\left(H_2^{*}\right) - F_{\overline{X}}\left(H_1^{*}\right),$$

$$P\left(NN^{*}\right) = \int_{H_1^{*}}^{H_2^{*}}\int_{H_1}^{H_2} W(\overline{X}, H) dH d\overline{X} =$$
$$= F\left(H_2^{*}, H_2\right) - F\left(H_1^{*}, H_2\right) - F\left(H_2^{*}, H_1\right) + F\left(H_1^{*}, H_1\right).$$

Модифицированный критерий Неймана-Пирсона минимизирует условную вероятность перебраковки $P_{\overline{N}^{*}/N}\left(H_1^{*}, H_2^{*}\right)$ при заданном ограничении $g\left(H_1^{*}, H_2^{*}\right) = P_{N^{*}/\overline{N}}\left(H_1^{*}, H_2^{*}\right) - P_0$. Это задача нахождения условного минимума (экстремума) функции двух переменных

$P_{\overline{N}^*/N}\left(H_1^*, H_2^*\right)$ при условии связи $g\left(H_1^*, H_2^*\right)$. Для ее решения воспользуемся методом Лагранжа.

Введем ограничения области определения функций $P_{\overline{N}^*/N}\left(H_1^*, H_2^*\right)$ и $g\left(H_1^*, H_2^*\right)$, и рассмотрим их частные производные

$$-\infty < H_1^* < H_2^* < \infty,\ H_1^* < H_2,\ H_2^* > H_1,\ -\infty < H_1 < H_2 < \infty, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial P_{\overline{N}^*/N}}{\partial H_1^*} = \frac{W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)}{P(N)}\left[F_{H/H_1^*}(H_2) - F_{H/H_1^*}(H_1)\right],$$

$$\frac{\partial P_{\overline{N}^*/N}}{\partial H_2^*} = -\frac{W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)}{P(N)}\left[F_{H/H_2^*}(H_2) - F_{H/H_2^*}(H_1)\right],$$

$$\frac{\partial g}{\partial H_1^*} = \frac{W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)}{1-P(N)}\left[F_{H/H_1^*}(H_2) - F_{H/H_1^*}(H_1) - 1\right],$$

$$\frac{\partial g}{\partial H_2^*} = -\frac{W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)}{1-P(N)}\left[F_{H/H_2^*}(H_2) - F_{H/H_2^*}(H_1) - 1\right].$$

где $$F_{H/H_{1,2}^*}\left(H_{1,2}\right) = F_{H/\overline{X}=H_{1,2}^*}\left(H_{1,2}\right) = \int_{-\infty}^{H_{1,2}} W\left(H / \overline{X} = H_{1,2}^*\right) dH,$$

$W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) = W\left(\overline{X} = H_2^*\right)$.

Как видно, функции $P_{\overline{N}^*/N}\left(H_1^*, H_2^*\right)$ и $g\left(H_1^*, H_2^*\right)$ дифференцируемые при всех значениях аргументов: для них существуют частные производные, которые являются непрерывными функциями. Непрерывность $W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)$ следует из непрерывности $W(H)$ и $W(\overline{X} / H)$, как произведения непрерывных функций, а функции $F_{H/H_{1,2}^*}$ непрерывны по определению. Якобиан $\dfrac{D(g)}{D\left(H_1^*\right)} = \dfrac{\partial g}{\partial H_1^*} \neq 0$, откуда следует, что должно выполняться необходимое условие $W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) \neq 0$. В этом случае можно записать функцию Лагранжа и выразить ее через безусловные вероятности

$$L(H_1^*, H_2^*, \lambda) = 1 - \frac{1 + P(N)(\lambda - 1)}{P(N)\left(1 - P(N)\right)} P_{NN^*}\left(H_1^*, H_2^*\right) + \lambda\left[\frac{P_{N^*}\left(H_1^*, H_2^*\right)}{1 - P(N)} - P_0\right], \qquad (3)$$

 ISSN 1562-9945

где λ - множитель Лагранжа.

Необходимое условие условного экстремума представляется в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial H_1^*} L(H_1^*, H_2^*, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial H_2^*} L(H_1^*, H_2^*, \lambda) = 0, \\ g = P_{N^*/\overline{N}}\left(H_1^*, H_2^*\right) - P_0 = 0, \\ W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Определим частные производные системы (4)

$$\frac{\partial L}{\partial H_1^*} = \frac{1 + P(N)(\lambda - 1)}{P(N)\left(1 - P(N)\right)} W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)\left[F_{H/H_1^*}\left(H_2\right) - F_{H/H_1^*}\left(H_1\right) - \frac{\lambda P(N)}{1 + P(N)(\lambda - 1)}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_2^*} = -\frac{1 + P(N)(\lambda - 1)}{P(N)\left(1 - P(N)\right)} W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)\left[F_{H/H_2^*}\left(H_2\right) - F_{H/H_2^*}\left(H_1\right) - \frac{\lambda P(N)}{1 + P(N)(\lambda - 1)}\right]$$

$$g = \frac{1}{1 - P(N)}\left[F_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) - F_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) - F\left(H_2^*, H_2\right) + F\left(H_1^*, H_2\right) + F\left(H_2^*, H_1\right) - F\left(H_1^*, H_1\right)\right] - P_0$$

Подставив найденные частные производные в (4), а также добавив уравнение для $P(N)$, получим систему

$$\begin{cases} P(N) = F_H\left(H_2\right) - F_H\left(H_1\right), \\ F_{H/H_1^*}\left(H_2\right) - F_{H/H_1^*}\left(H_1\right) = \dfrac{\lambda P(N)}{1 + P(N)(\lambda - 1)}, \\ F_{H/H_2^*}\left(H_2\right) - F_{H/H_2^*}\left(H_1\right) = \dfrac{\lambda P(N)}{1 + P(N)(\lambda - 1)}, \\ F_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) - F_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) + F\left(H_1^*, H_2\right) - F\left(H_2^*, H_2\right) + F\left(H_2^*, H_1\right) - F\left(H_1^*, H_1\right) = \\ = P_0\left(1 - P(N)\right), \\ W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим достаточные условия минимума. Пусть найдена некоторая стационарная точка $M_0 = \left\{H_1^*, H_2^*\right\}$, а также соответствующий ей множитель λ. В этом случае достаточно, чтобы определитель матрицы H был отрицательной величиной (в данном случае угловой минор H_3 совпадает с определителем)[3].

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \; a_{12} = \frac{\partial g(M_0)}{\partial H_1^*}, \; a_{13} = \frac{\partial g(M_0)}{\partial H_2^*},$$

$$a_{23} = \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial H_1^* \partial H_2^*} = \frac{\partial^2 L(M_0)}{\partial H_2^* \partial H_1^*} = 0,$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 L(M_0)}{\left(\partial H_1^*\right)^2} = \frac{1 + P(N)(\lambda - 1)}{P(N)\left(1 - P(N)\right)} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \dfrac{dW_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)}{dH_1^*} \left(F_{H/H_1^*}(H_2) - F_{H/H_1^*}(H_1) - \dfrac{\lambda P(N)}{1 + P(N)(\lambda - 1)} \right) + \\ + W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) \left(\dfrac{dF_{H/H_1^*}(H_2)}{dH_1^*} - \dfrac{dF_{H/H_1^*}(H_1)}{dH_1^*} \right) \end{array} \right],$$

$$a_{33} = \frac{\partial^2 L(M_0)}{\left(\partial H_2^*\right)^2} = -\frac{1 + P(N)(\lambda - 1)}{P(N)\left(1 - P(N)\right)} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \dfrac{dW_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)}{dH_2^*} \left(F_{H/H_2^*}(H_2) - F_{H/H_2^*}(H_1) - \dfrac{\lambda P(N)}{1 + P(N)(\lambda - 1)} \right) + \\ + W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) \left(\dfrac{dF_{H/H_2^*}(H_2)}{dH_2^*} - \dfrac{dF_{H/H_2^*}(H_1)}{dH_2^*} \right) \end{array} \right].$$

Плотности $W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)$ и $W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)$ должны быть дифференцируемые в точке M_0, $\det \mathrm{H} = -a_{33}a_{12}^2 - a_{22}a_{13}^2$. Таким образом, достаточное условие минимума $a_{33}a_{12}^2 + a_{22}a_{13}^2 > 0$ можно записать как

$$\frac{\partial^2 L(M_0)}{\left(\partial H_2^*\right)^2} \left(\frac{\partial g(M_0)}{\partial H_1^*} \right)^2 + \frac{\partial^2 L(M_0)}{\left(\partial H_1^*\right)^2} \left(\frac{\partial g(M_0)}{\partial H_2^*} \right)^2 > 0. \tag{6}$$

Совместное решение системы (5) и неравенства (6) после элементарных преобразований позволяет записать достаточное условие локального условного минимума в виде

$$\left[1 + P(N)(\lambda - 1)\right] \times$$

$$\times \left[W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) \frac{d}{dH_1^*} \left(F_{H/H_1^*}(H_2) - F_{H/H_1^*}(H_1) \right) - W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) \frac{d}{dH_2^*} \left(F_{H/H_2^*}(H_2) - F_{H/H_2^*}(H_1) \right) \right] > 0 \tag{7}$$

 ISSN 1562-9945

Из системы (5), с учетом ограничений (2), следует неравенство $0 < \lambda P(N) \big/ \big(1 + P(N)(\lambda - 1)\big) < 1$, из которого также следует, что $\lambda > 0$. Так как множество λ должно быть положительным, то положительными должны быть и значения выражения $1 + P(N)(\lambda - 1)$, которое при положительных значениях λ никогда не равно нулю. Поэтому достаточное условие (7) можно упростить и записать в виде

$$W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)\frac{d}{dH_1^*}\left(F_{H/H_1^*}\left(H_2\right) - F_{H/H_1^*}\left(H_1\right) \right) - W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)\frac{d}{dH_2^*}\left(F_{H/H_2^*}\left(H_2\right) - F_{H/H_2^*}\left(H_1\right) \right) > 0 \tag{8}$$

Функции F_{H/H_1^*} и $F_{H/H_2^*}\left(H_2\right)$ принадлежат одному параметрическому семейству, однако их параметры зависят от неизвестных H_1^* и H_2^*. Исходя из этого, представляется возможным ввести функцию $\Delta F(H^*) = \Delta F(H^*, H_1, H_2) = F_{H/H^*}\left(H_2\right) - F_{H/H^*}\left(H_1\right)$. В силу положительной определенности $W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)$ и $W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)$, а также потребовав, чтобы $W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) \neq 0$, неравенство (8) можно записать в виде

$$\frac{\Delta F'\left(H_1^*\right)}{W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)} > \frac{\Delta F'\left(H_2^*\right)}{W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)} \quad , \tag{9}$$

где $\Delta F'\left(H^*\right) = \dfrac{d}{dH^*}\Delta F(H^*)$.

Таким образом, для условного минимума достаточно, чтобы приращение функции $G\left(H^*\right) = \Delta F'\left(H^*\right) \big/ W_{\overline{X}}\left(H^*\right)$ на участке $[H_1^*, H_2^*]$ было отрицательным $G\left(H_1^*\right) - G\left(H_2^*\right) > 0$.

С учетом (5) множитель λ можно исключить и свести систему уравнений к системе двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} \Delta F(H^*) = F_{H/H^*}\left(H_2\right) - F_{H/H^*}\left(H_1\right), \quad G\left(H^*\right) = \dfrac{\Delta F'\left(H^*\right)}{W_{\overline{X}}\left(H^*\right)}, \\ P(N) = F_H\left(H_2\right) - F_H\left(H_1\right), \\ \Delta F(H_1^*) = \Delta F(H_2^*), \\ F_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) - F_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) + F\left(H_1^*, H_2\right) - F\left(H_2^*, H_2\right) + F\left(H_2^*, H_1\right) - F\left(H_1^*, H_1\right) = \\ = P_0\left(1 - P(N)\right), \\ G\left(H_1^*\right) > G\left(H_2^*\right), \quad W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right) \neq 0, \quad W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right) \neq 0, \quad H_2^* > H_1^*. \end{cases} \tag{9}$$

Следует заметить, что если была найдена точка $M_0 = \left\{H_1^*, H_2^*\right\}$, удовлетворяющая условию (9), то данная точка необходимо и достаточно является точкой условного локального минимума. Если данная точка удовлетворяет необходимому условию, но не достаточному, то заключить, что данная точка не является условным минимумом нельзя. При решении системы (9) численными методами рекомендуется:

1) в случае отсутствия качественных аппроксимаций функций распределений, являющихся несобственными интегралами от плотностей, использовать определенные интегралы с пределами H_1^*, H_2^*, H_1, H_2;

2) в качестве начальных приближений выбрать значения $M_0 = \left\{H_1^* = H_1,\, H_2^* = H_2\right\}$;

3) область локализации решений ограничить интервалом $H_1^* \in \left[\frac{3H_1 - H_2}{2}, \frac{H_1 + H_2}{2}\right)$, $H_2^* \in \left(\frac{H_1 + H_2}{2}, \frac{3H_2 - H_1}{2}\right]$;

4) точность определения H_1^*, H_2^* не должна превышать точности, с которой известна дисперсия $D\left[\overline{X} / H\right]$, или параметры плотности распределения $W\left(\overline{X} / H\right)$, через которые она выражается.

Если в результате решения было найдено несколько точек условного локального минимума $M_{0i} = \left\{H_1^*, H_2^*\right\}$, то среди всех нужно оставить ту, при которой вероятность перебраковки $P_{\overline{N}^*/N}\left(H_1^*, H_2^*\right)$ наименьшая.

Нормальное распределение параметра и ошибок

Если технологический процесс изготовления изделий подвержен влиянию большого числа неконтролируемых мешающих случайных факторов одинаковой силы, тогда контролируемый параметр H, как случайная величина, может быть описан нормальным законом распределения. Ошибки измерений, тоже, как правило, нормальные. В этом случае плотности распределения $W(H)$ и $W\left(\overline{X} / H\right)$ можно аппроксимировать законом распределения Гаусса

 ISSN 1562-9945

$$W(H) = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(H-H_T)^2}{2\sigma_T^2}\right),$$

$$W(\overline{X}/H) = \frac{1}{\sigma_{\overline{X}/H}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\overline{X}-H\right)^2}{2\sigma_{\overline{X}/H}^2}\right). \qquad (10)$$

Используя (1) и (10) можно показать, что закон распределения оценки $W\left(\overline{X}\right)$ также нормальный, причем $M\left[\overline{X}\right] = H_T$, $\sigma\left[\overline{X}\right] = \sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_{\overline{X}/H}^2}$. Также можно показать, что коэффициент корреляции ρ между оценкой $\overline{X}$ и параметром H равен

$$\rho = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_{\overline{X}/H}}{\sigma_T}\right)^2}} \qquad (11)$$

Из (11) видно, что при безошибочных измерениях параметра $\sigma_T >> \sigma_{\overline{X}/H}$, $\rho = 1$ и значение оценки $\overline{X}$ является значением параметра H. При больших ошибках $\sigma_{\overline{X}/H} >> \sigma_T$ оценка и параметр почти независимы.

Условный закон распределения

$$W(H/\overline{X}) = \frac{W(H)W\left(\overline{X}/H\right)}{W(\overline{X})} = \frac{1}{\sigma_{H/\overline{X}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(H-a\left(\overline{X}\right)\right)^2}{2\sigma_{H/\overline{X}}^2}\right),$$

где $a\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\overline{X}\sigma_T^2 + H_T\sigma_{\overline{X}/H}^2}{\sigma_T^2+\sigma_{\overline{X}/H}^2}$, $\quad \sigma_{H/\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma_T^2\sigma_{\overline{X}/H}^2}{\sigma_T^2+\sigma_{\overline{X}/H}^2}$.

Определим $\Delta F(H^*)$ и $G\left(H^*\right)$

$$\Delta F(H^*) = F_{H/H^*}(H_2) - F_{H/H^*}(H_1) = \Phi\left(\frac{H_2 - a(H^*)}{\sigma_{H/\overline{X}}}\right) - \Phi\left(\frac{H_1 - a(H^*)}{\sigma_{H/\overline{X}}}\right);$$

$$G\left(H^*\right) = \frac{\Delta F'\left(H^*\right)}{W_{\overline{X}}\left(H^*\right)} = \left\{\frac{d}{dH^*}\Phi\left(\frac{H - a(H^*)}{\sigma_{H/\overline{X}}}\right) = -\rho^2 W\left(H/H^*\right)\right\} =$$

$$= \rho^2\frac{W\left(H_1/H^*\right) - W\left(H_2/H^*\right)}{W_{\overline{X}}\left(H^*\right)};$$

Подставив функции для нормального закона распределения в систему (9), получим

$$\begin{cases} P(N)=\Phi\left(\dfrac{H_2-H_T}{\sigma_T}\right)-\Phi\left(\dfrac{H_1-H_T}{\sigma_T}\right), \\ \Delta F\left(H_1^*\right)=\Delta F\left(H_2^*\right), \\ \Phi\left(\dfrac{H_2^*-H_T}{\sigma_{\overline{X}}}\right)-\Phi\left(\dfrac{H_1^*-H_T}{\sigma_{\overline{X}}}\right)+F_{0,1,\rho}\left[\left(\dfrac{H_1^*-H_T}{\sigma_{\overline{X}}}\right),\left(\dfrac{H_2-H_T}{\sigma_T}\right)\right]- \\ -F_{0,1,\rho}\left[\left(\dfrac{H_2^*-H_T}{\sigma_{\overline{X}}}\right),\left(\dfrac{H_2-H_T}{\sigma_T}\right)\right]+F_{0,1,\rho}\left[\left(\dfrac{H_2^*-H_T}{\sigma_{\overline{X}}}\right),\left(\dfrac{H_1-H_T}{\sigma_T}\right)\right]- \\ -F_{0,1,\rho}\left[\left(\dfrac{H_1^*-H_T}{\sigma_{\overline{X}}}\right),\left(\dfrac{H_1-H_T}{\sigma_T}\right)\right]=P_0\left(1-P(N)\right), \\ G\left(H_1^*\right)>G\left(H_2^*\right), \quad W_{\overline{X}}\left(H_1^*\right)\neq 0, \quad W_{\overline{X}}\left(H_2^*\right)\neq 0, \quad H_2^*>H_1^*. \end{cases} \qquad 12)$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)dt$ – интеграл вероятности Гаусса;

$F_{0,1,\rho}(x,h)$ – двумерная функция нормального распределения с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции ρ.

Численное решение системы (12) позволяет найти пороги контроля H_1^*, H_2^*. Для аппроксимации двумерной функции нормального распределения рекомендуется использовать алгоритм [4], поскольку для него, в отличие от других, ошибка аппроксимации убывает с ростом ρ. Для аппроксимации одномерной функции нормального распределения может быть использован алгоритм [5].

Выводы

1. Сформулирована задача выбора порогов контроля качества по модифицированному критерию Неймана-Пирсона для изделий, контролируемый параметр которых является случайной величиной, измеряется с ошибками и для которого задан интервал допуска.

2. Получены в общем виде уравнения для определения порогов контроля по модифицированному критерию Неймана-Пирсона в задаче контроля качества объектов со случайными параметрами и за-

 ISSN 1562-9945

данными интервалами допуска. Определены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять пороги контроля.

3. Предложен алгоритм численного решения уравнений для определения порогов контроля с использованием известных аппроксимаций гауссовых законов распределения вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошулян А.В. Задача оптимального контроля качества изделий со случайными параметрами/ А.В. Кошулян, В.П. Малайчук, А.В. Мозговой // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 1(66). – Днепропетровск, 2010. – с. 91-99.
2. Малайчук В.П.Контроль объектов со случайными параметрами / В.П. Малайчук, А.В. Кошулян, Н.А Лысенко// Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. – Выпуск 3(68). – Днепропетровск, 2010. – с. 20-25.
3. Колыбасова В.В. Достаточные условия существования решения задачи об условном экстремуме методом Лагранжа [Электронный ресурс]: методическое пособие для студентов физического факультета МГУ, изучающих математический анализ / В.В. Колыбасова, Н.Ч. Крутицкая//Методическое пособие – 20с. Режим доступа: http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_gen/20/Lagrange.pdf
4. Albers, Willem and Kallenberg, Wilbert C.M. (1994) A simple approximation to the bivariate normal distribution with large correlation coefficient. Journal of Multivariate Analysis, 49 (1). pp. 87-96. ISSN 0047-259X
5. Shannon R. Bowling, Mohammad T. Khasawneh, Sittichai Kaewkuekool, Byung Rae Cho. (2010) A logistic approximation to the cumulative normal distribution. Journal of Industrial Engineering and Management, - 2(1), pp. 114-127. ISSN 2013-0953