

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ
УСРЕДНЯЮЩЕГО БУНКЕРА В УСЛОВИЯХ
УГОЛЬНЫХ ШАХТ**

Анотация. На основе теории непрерывных марковских процессов разработана математическая модель функционирования усредняющих бункеров конвейерного транспорта угольных шахт. Определена минимальная производительность разгрузки бункера в режиме поддержания в нем защитного слоя груза. Результаты теоретических исследований сравнивались с результатами имитационного моделирования.

Ключевые слова: усредняющий бункер, математическая модель, функционирование ленточный конвейер угольной шахты

В работе подземного конвейерного транспорта угольных шахт важную роль играют усредняющие бункеры. Усредняющие бункеры обычно оборудуются в участковых выработках, особенно в местах перегрузки забойных грузопотоков на сборные конвейеры.

С целью предотвращения разрушения горнотранспортного оборудования вследствие падения крупных кусков груза в бункере необходимо поддерживать защитный слой груза. Для этого необходимо в зависимости от параметров поступающего грузопотока, вместимости бункера и объема защитного слоя груза определить необходимую производительность разгрузки.

В случае работы бункера в режиме поддержания защитного слоя разгружаемый из бункера грузопоток выключается, если количество груза в бункере достигает минимального значения защитного слоя груза V_1 (м³), и включается, если количество груза в бункере достигает максимального значения защитного слоя груза V_2 (м³). При этом загружаемый в бункер грузопоток не выключается, если количество груза в бункере достигает максимального или минимального значения защитного слоя груза [1].

Результаты имитационного моделирования этого режима показали [1], что в случае, когда средняя производительность поступающего грузопотока m_Q больше либо равна производительности разгрузки Q_n ($m_Q \geq Q_n$), объем груза в бункере неограниченно увеличивается, соответственно нет необходимости поддержания защитного слоя груза. Если же $m_Q < Q_n$, то среднее количество груза в бункере представляет конечное значение, которое зависит от параметров поступающего грузопотока и значений минимального и максимального объемов груза в бункере.

Следовательно, для поддержания защитного слоя груза в бункере необходимо чтобы производительность разгрузки бункера была больше средней производительности поступающего в него грузопотока, т.е. $Q_n > m_Q$.

В этом случае для определения зависимости среднего количества груза в бункере от параметров загружаемого и разгружаемого грузопотоков необходимо иметь математическую модель функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания защитного слоя.

Наиболее широкое распространение получил способ разгрузки бункера с помощью питателя, в этом случае производительность разгрузки может регулироваться путем изменения скорости питателя или изменения размеров выпускного отверстия (рис. 1).

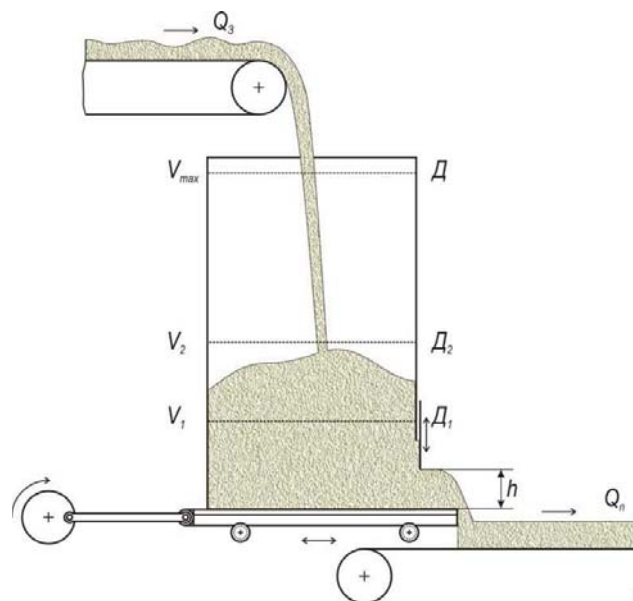


Рисунок 1 - Расчетная схема функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания защитного слоя груза с помощью питателя

Для поддержания защитного слоя груза необходимо знать, при каком значении Q_n объем груза в бункере будет минимальным. Для этого необходимо иметь математическую модель количества груза в бункере, т.е. математическую модель функционирования бункера.

Целью статьи является разработка математической модели функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания в нем защитного слоя груза $Q_n > m_Q$.

Задачей исследования является определение средней минимальной производительности разгружаемого из бункера грузопотока, работающего в режиме поддержания защитного слоя груза (см. рис. 1).

Для разработки математической модели функционирования усредняющего бункера предположим, что поступающий в бункер минутный грузопоток представляет собой случайный нормальный марковский процесс с математическим ожиданием m_Q (т/мин), средним квадратическим отклонением σ_Q (т/мин) и корреляционной функцией, равной [2]

$$R_Q(\tau) = \sigma_Q^2 e^{-\alpha\tau},$$

где α – параметр корреляционной функции.

Разгружаемый из бункера грузопоток имеет постоянное значение Q_n (т/мин), равное минутной производительности питателя или производительности свободного истечения сыпучего груза из бункера с регулируемой заслонкой.

Процесс функционирования бункера при поддержании защитного слоя, согласно [3], является двумерным нормальным марковским процессом, представленным системой уравнений:

$$\begin{cases} \gamma \frac{dV}{dt} = Q(t) - Q_n; \\ \frac{dQ}{dt} + \alpha Q(t) = \sigma_Q \sqrt{2\alpha} \zeta(t) + \alpha m_Q, \end{cases} \quad (1)$$

где $M[Q(t)] = m_Q$; $D[Q(t)] = \sigma_Q^2$.

Здесь $V(t)$ – количество груза в бункере в момент времени t , м³; $Q(t)$ – минутный грузопоток, поступающий в бункер, т/мин; $\zeta(t)$ – белый шум, т.е. случайная функция с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной дельта-функции $\delta(t)$ [3]; γ – объемный вес материала, т/м³.

При этом, если разгрузочное устройство работает, то в уравнении (1) $Q_n > 0$, если разгрузочное устройство не работает, то в уравнении (1) $Q_n = 0$.

Уравнения (1) должны удовлетворять начальным и граничным условиям:

- начальные условия:

при $t = 0$ $Q(0) = Q_0$; $V(0) = V_1$, если $Q_n = 0$ (разгрузка выключена);
 $Q(0) = Q_0$; $V(0) = V_2$, если $Q_n \neq 0$ (разгрузка включена); (2)

- граничные условия:

при $V = V_2$ $Q_n = 0$;
 при $V = V_1$ $Q_n > 0$, (3)

где Q_0 – величина грузопотока, поступающего в бункер в начальный момент времени, т/мин.

Кроме того, должны выполняться условия

$$V_1 \leq V(t) \leq V_2 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Первое уравнение системы (1) представляет собой уравнение баланса минутного количества груза, поступающего и разгружаемого из бункера. Второе уравнение системы представляет собой математическое описание поступающего грузопотока в бункер в виде случайного нормального стационарного процесса, записанного в форме уравнения Ланжевена [4].

Случайный процесс, описываемый системой уравнений (1), является непрерывным марковским процессом, функция распределения которого описывается уравнением Фокера-Планка-Колмогорова первого рода [3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (x_2 - Q_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} - \alpha(x_2 - m_Q) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha \sigma_Q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4)$$

где $f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2)$ – плотность вероятности двумерной условной функции распределения перехода марковского процесса из начального состояния (x_1, x_2) в начальный момент времени t в состояние (y_1, y_2) в момент времени τ ($\tau > t$).

Здесь x_1, y_1 – значения случайной функции $V'(t) = \gamma V(t)$ в моменты времени t и τ , т.е. $x_1 = V'(t)$, $y_1 = V'(\tau)$, а x_2, y_2 – значения случайной функции $Q(t)$ в моменты времени t и τ , т.е. $x_2 = Q(t)$, $y_2 = Q(\tau)$.

При этом должны выполняться начальные и граничные условия:

- начальные условия

$$\text{при } t = \tau \quad f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2) = \delta(x_1 - y_1) \cdot \delta(x_2 - y_2);$$

- граничные условия

$$\text{при } x_1 = V'_1 = \gamma V_1 \quad f = 0; \text{ если } Q_n = 0;$$

$$x_1 = V'_2 = \gamma V_2 \quad f = 0; \text{ если } Q_n > 0;$$

$$\text{при } x_2 \rightarrow \infty \quad f = 0 \text{ при любом } Q_n \geq 0.$$

Кроме того, должны выполняться условия нормировки, т.е.

$$f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2) > 0;$$

$$\int_{V'_{min}}^{V'_{max}} \int_0^{\infty} f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 1.$$

Для определения среднего значения времени заполнения бункера θ при неработающей разгрузке ($Q_n = 0$) и работающей разгрузке ($Q_n > 0$), следуя работам [3,4], проинтегрируем уравнение (4) по переменной y_1 от V'_1 до V'_2 , по y_2 от 0 до ∞ и по времени t от 0 до ∞ . В результате приходим к уравнению Понтрягина [3,4]:

$$(x_2 - Q_n) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \alpha(x_2 - m_Q) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \alpha \sigma_Q^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = -1, \quad (5)$$

где $\theta = \varphi(x_1, x_2)$.

При этом выполняются начальные и граничные условия:

- начальные условия

$$\text{при } t = 0 \quad x_1 = V'_1, \text{ если } Q_n = 0;$$

$$x_1 = V'_2, \text{ если } Q_n > 0;$$

$$x_2 = Q_0 \text{ при любом } Q_n \geq 0; \quad (6)$$

- граничные условия

$$\text{при } x_1 = V'_2 \quad \theta = 0, \quad \text{если } Q_n = 0;$$

$$x_1 = V'_1 \quad \theta = 0, \quad \text{если } Q_n > 0. \quad (7)$$

Уравнение (5) в частных производных от двух переменных можно свести к уравнению Рикати. Однако уравнение Рикати в общем случае не имеет аналитического решения [5].

Однако исследования показали, что среднее квадратичное отклонение σ_Q грузопотока, поступающего из лавы в бункер, намного меньше средней минутной производительности m_Q , т.е. $\sigma_Q \ll m_Q$.

Следовательно, отношение

$$\varepsilon = \frac{\sigma_Q}{m_Q} \quad (8)$$

является малым параметром. Кроме того, для минутного грузопотока, поступающего в бункер, выполняется неравенство

$$|x_2 - m_Q| < k_1 \sigma_Q, \quad (9)$$

где k_1 – некоторый безразмерный коэффициент, характеризующий степень относительного отклонения реального грузопотока, поступающего в бункер, от среднего значения.

Следовательно, коэффициент, стоящий перед вторым членом уравнения (5), является малой величиной, которая изменяется в пределах

$$-\alpha k_1 \varepsilon m_Q < \alpha(x_2 - m_Q) < \alpha k_1 \varepsilon m_Q. \quad (10)$$

Вместо одного уравнения (5), с учетом (10), рассмотрим два уравнения с неизвестными значениями θ_1 и θ_2 , у которых коэффициенты при втором члене уравнения (5) принимают максимальное и минимальное значение соответственно:

$$\varepsilon^2 \alpha m_Q^2 \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_2^2} - (-1)^i \varepsilon \alpha k_1 m_Q \frac{\partial \theta_i}{\partial x_2} + (x_2 - Q_n) \frac{\partial \theta_i}{\partial x_1} = -1, \quad (11)$$

$$(i = 1, 2).$$

Здесь θ_1 – среднее время заполнения бункера в случае неработающей ($Q_n = 0$) или работающей ($Q_n > 0$) разгрузки при $Q_0 = Q_{01}$, мин; θ_2 – среднее время заполнения бункера в случае неработающей ($Q_n = 0$) или работающей ($Q_n > 0$) разгрузки при $Q_0 = Q_{02}$, мин.

При этом выполняются начальные и граничные условия (6) и (7), где Q_0 в зависимости от i принимает значение

$$Q_{0i} = m_q + (-1)^{i+1} k_1 \sigma_Q \quad (i=1, 2).$$

Тогда решение уравнения (5), в силу малости параметра ε , приближенно можно представить в виде

$$\theta \approx \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}. \quad (12)$$

Для решения уравнений (11) применим асимптотический метод аппроксимации Паде [6], т.е. представим решение уравнений (11) в виде отношения линейных полиномов

$$\theta_i = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon}{1 + b_1 \varepsilon}. \quad (13)$$

При этом разложение дроби (13) в ряд Тейлора по малому параметру ε должно совпадать с разложением решения уравнений (11) в

ряд Тейлора по малому параметру ε до второго порядка включительно.

В результате приближенные решения уравнений (11) примут вид:

- в случае неработающей разгрузки ($Q_n = 0$)

$$\theta_i = \frac{\gamma(V_2 - V_1)}{Q_{0i}} A_i \quad (i=1,2), \quad (14)$$

где

$$A_i = \frac{1 + (-1)^{i+1} \left[\alpha \left(1 - \frac{k_1}{2}\right) \frac{\gamma(V_2 - V_1)}{Q_{0i}^2} + \frac{2k_1}{Q_{0i}} \right] \sigma_Q}{1 + (-1)^{i+1} \left[\frac{\alpha \gamma(V_2 - V_1)}{Q_{0i}^2} - \frac{2k_1}{Q_{0i}} \right] \sigma_Q};$$

- в случае работающей разгрузки ($Q_n > 0$)

$$\theta'_i = \frac{\gamma(V_2 - V_1)}{Q_{0i} - Q_n} A'_i, \quad (i=1,2), \quad (15)$$

где

$$A'_i = \frac{1 + (-1)^i \left[\alpha \left(1 - \frac{k_1}{2}\right) \frac{\gamma(V_2 - V_1)}{(Q_n - Q_{0i})^2} + \frac{2k_1}{Q_n - Q_{0i}} \right] \sigma_Q}{1 + (-1)^i \left[\frac{\alpha \gamma(V_2 - V_1)}{(Q_n - Q_{0i})^2} - \frac{2k_1}{Q_n - Q_{0i}} \right] \sigma_Q}.$$

Разобьем один цикл работы бункера в режиме поддержания защитного слоя груза на два периода. В первом периоде разгрузка бункера не работает ($Q_n = 0$), объем груза в бункере увеличивается от минимального значения V_{\min} до максимального V_{\max} . Во втором периоде разгрузка бункера работает ($Q_n > 0$) и объем груза в бункере уменьшается от максимального значения до минимального.

Среднее время первого периода работы бункера (время загрузки) равно t_s , вычисляется по формуле (12) при значении $Q_n = 0$. А среднее время второго периода (время разгрузки бункера) t_p вычисляется по формуле (12) при значении $Q_n > 0$.

Следовательно, t_s и t_p , согласно (12), определяются по формулам

$$t_s = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad t_p = \frac{\theta'_1 + \theta'_2}{2}, \quad (16)$$

при этом θ_i и θ'_i определяются по формулам (14) и (15).

Среднее время одного цикла работы бункера t_c определяется по формуле

$$t_c = t_3 + t_p. \quad (17)$$

Определим средний объем груза в бункере в стационарном режиме поддержания защитного слоя груза, в предположении об эргодичности случайного процесса [7], по формуле

$$V_c = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} V(t) dt, \quad (18)$$

где

$$V(t) = \begin{cases} V_1 + m_Q t, & \text{при } 0 \leq t < t_3; \\ V_2 - (Q_n - m_Q)(t - t_3), & \text{при } t_3 \leq t \leq t_c. \end{cases}$$

В результате интегрирования выражение (18) примет вид

$$V_c = \frac{V_1 t_3 + V_2 t_p}{t_c} + \frac{m_Q t_3^2 - (Q_n - m_Q) t_p^2}{2 t_c}. \quad (19)$$

При этом t_3 , t_p и t_c определяются по формулам (16) и (17).

Анализ формулы (19) показал, что средний объем груза в бункере в режиме поддержания защитного слоя существенно зависит от среднего значения поступающего в бункер грузопотока m_Q , минимального V_1 и максимального V_2 объемов защитного слоя груза в бункере, производительности разгружаемого грузопотока Q_n и мало зависит от изменения параметров грузопотока σ_Q и α .

На рисунке 2 показан график зависимости среднего объема груза в бункере V_c в зависимости от производительности разгрузки Q_n , построенный согласно формуле (19). При этом исходные данные принимали значения: $V_2 = 3,14 \text{ м}^3$; $V_1 = 1,57 \text{ м}^3$; $m_Q = 3,7 \text{ т/мин}$; $\sigma_Q = 1,23 \text{ т/мин}$; $\alpha = 0,14 \text{ мин}^{-1}$; $\gamma = 1 \text{ т/м}^3$.

Из графика (см. рис. 2) видно, что при увеличении производительности разгрузки Q_n средний объем груза в бункере V_c сначала резко уменьшается, достигая минимального значения, а затем при дальнейшем увеличении Q_n средний объем V_c увеличивается и стремится к предельному значению, равному полусумме максимального и минимального объемов груза в бункере ($V_c \rightarrow 2,36$ при $Q_n \rightarrow \infty$).

Кроме того, на рис. 2 точками показаны результаты имитационного моделирования функционирования бункера в режиме поддержания защитного слоя, полученные для тех же исходных данных. Из

графика видно, что теория отличается от результатов имитационного моделирования не более чем на 10 %.

Исследования показали, что минимальное значение среднего объема бункера $V_{c \min}$ мало отличается от полусуммы максимального и минимального объемов груза в бункере, т.е.

$$V_{c \min} \approx \frac{V_1 + V_2}{2}. \quad (20)$$

В связи с этим за минимальную производительность разгрузки $Q_{n \min}$ бункера принимается производительность, при которой средний объем груза в бункере, работающем в режиме поддержания защитного слоя груза, равняется полусумме максимального и минимального объемов груза в бункере.

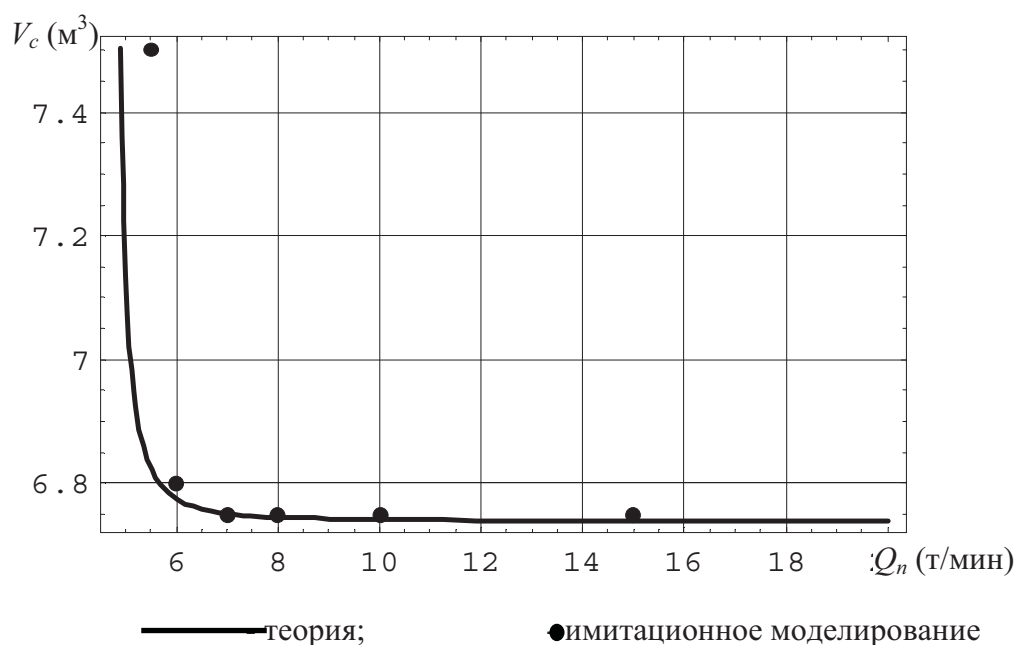


Рисунок 2 - График зависимости среднего объема в бункере от производительности разгрузки

Подставляя значение $V_{c \min}$ из (20) в формулу (19), можно определить минимальное значение разгрузки $Q_{n \min}$. В нашем случае расчеты показали, что $Q_{n \min} = 5,75$ т/мин.

Выводы

На основании теории непрерывных марковских процессов разработана математическая модель функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания защитного слоя груза.

Получены аналитические зависимости среднего объема груза в бункере от параметров загружаемого и разгружаемого грузопотоков.

Определена минимальная производительность разгружаемого грузопотока, при которой средний объем бункера, работающего в режиме поддержания защитного слоя груза, минимален.

Полученные теоретические результаты отличались от результатов имитационного моделирования не более чем на 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирия Р.В. Имитационные модели функционирования усредняющих и аккумулирующих бункеров конвейерных линий угольных шахт / Р.В. Кирия, Д.Д. Брагинец, Т.Ф. Мищенко // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. / ИГТМ НАНУ. - Днепропетровск, 2008. – Вып. 77. - С. 100-109.
2. Шахмейстер Л.Г. Подземные конвейерные установки / Л.Г. Шахмейстер, Г.И. Солод. - М.: Недра, 1976. - 432 с.
3. Свешников А.А. Прикладные методы случайных функций / А.А. Свешников. - М.: Наука, 1968. - 464 с.
4. Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Издательство литературы по строительству, 1971. – 255 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
6. Бейкер Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Морис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Высшая школа, 2000. - 480 с.
8. Ларіонов Г.І. Про визначення максимальних значень попереднього навантаження металополімерних анкерів / Г.І. Ларіонов // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. / ИГТМ НАНУ. - Днепропетровск, 2010. – Вып. 85. - С. 180-185.