

А.И. Песчанский, А.И. Коваленко

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОТЕРЯМИ И КОНТРОЛЕМ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. Построена полумарковская модель однолинейной системы массового обслуживания с потерями и контролем качества обслуживания заявки в момент поступления в систему следующей заявки. Найдены в явном виде стационарные характеристики системы в предположении, что времена между поступлениями заявок в систему и времена их обслуживания являются случайными величинами с функциями распределения общего вида.

Ключевые слова: система массового обслуживания, полумарковский процесс, стационарные характеристики, контроль качества обслуживания

Введение. Системам массового обслуживания с потерями посвящено достаточно большое число работ. Обзор результатов по этой тематике можно найти, например, в монографиях [1–3]. Наиболее законченные результаты получены в предположении, что входящий поток требований в систему является простейшим, а время обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение. Допущение об общем виде распределений указанных случайных величин вызывает существенные трудности. Для их преодоления в работах [4–7] используется аппарат полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний. Так, в работе [5] найдены стационарные характеристики системы $GI/G/1/0$ с потерями, а в [7] с потерями и абсолютным приоритетом. В данной статье для системы массового обслуживания $GI/G/1/0$ находятся стационарные характеристики в предположении, что после проведенного обслуживания заявки, в момент поступления следующей, проводится контроль качества обслуживания предыдущей. В случае неудовлетворительного качества обслуживания заявка отправляется на повторное обслуживание. Так продолжается до тех пор, пока обслуживание не будет признано удовлетворительным.

Постановка задачи. Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) $GI/G/1/0$, в которой осуществляется контроль за качеством обслуживания прибором заявок. Система функционирует следующим образом.

Время между поступлениями заявок в систему – случайная величина (СВ) β с функцией распределения (ФР) $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ и плотностью $g(t)$. Поступившая на свободный прибор заявка начинает обслуживаться. Время ее обслуживания – СВ α с ФР $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$ и плотностью $f(t)$. Заявки, поступающие в момент, когда прибор занят обслуживанием, теряются. После завершения обслуживания заявки, в момент поступления следующей, начинается контроль качества проведенного обслуживания. Время проведения контроля – СВ σ с ФР $\Psi(t) = P\{\sigma \leq t\}$ и плотностью $\psi(t)$. С вероятностью p обслуживание признается успешным и начинается обслуживание заявки, поступившей в момент начала контроля. С вероятностью $q = 1 - p$ обслуживание признается неудовлетворительным и сразу начинается ее повторное обслуживание. Длительность времени повторного обслуживания – СВ γ с ФР $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$ и плотностью $\phi(t)$. При этом заявка, поступившая в момент начала контроля, теряется. После окончания повторного обслуживания в момент поступления очередной заявки в систему начинается контроль качества последнего проведенного обслуживания. В результате обслуживание с вероятностью p признается удовлетворительным, а с вероятностью q начинается повторное обслуживание.

Предполагается, что СВ α, β, γ и σ независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha, M\beta, M\gamma$ и $M\sigma$ соответственно.

Целью статьи является определение и анализ стационарных характеристик описанной выше СМО.

Построение математической модели. Для описания функционирования системы используем полумарковский процесс (ПМП) $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [4]. Введем следующее пространство полумарковских состояний системы:

$$E = \{21, 10x, 11x, 12x, 21x, 22x, 23, 23x\}.$$

Расшифруем коды состояния системы:

21 – поступившая в систему заявка начала обслуживаться впервые;

10х – обслуживание заявки закончено, до начала контроля качества ее обслуживания и поступления в систему следующей заявки осталось время x ;

11х – обслуживание заявки признано удовлетворительным; начинается обслуживание заявки, поступившей в момент начала контроля качества; до поступления следующей заявки осталось время x ;

12х – начинается повторное обслуживание заявки; до поступления следующей заявки осталось время x ;

21х – поступившая в систему заявка потеряна; до конца первичного обслуживания заявки осталось время x ;

22х – поступившая в систему заявка потеряна; до конца повторного обслуживания заявки осталось время x ;

23 – в систему поступила заявка и начинается диагностика качества обслуживания предыдущей, поступившая заявка ожидает окончания диагностики контроля;

23х – пришедшая в систему заявка потеряна, до конца диагностики качества обслуживания осталось время x .

Временная диаграмма функционирования системы представлена на рис.1, а граф переходов системы изображен на рис.2.

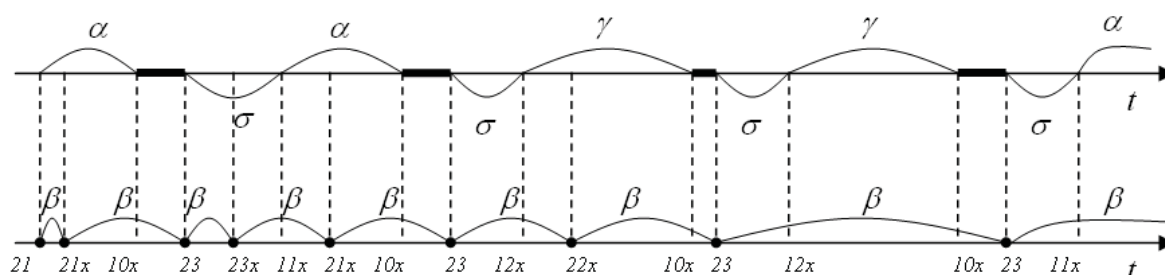


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования системы

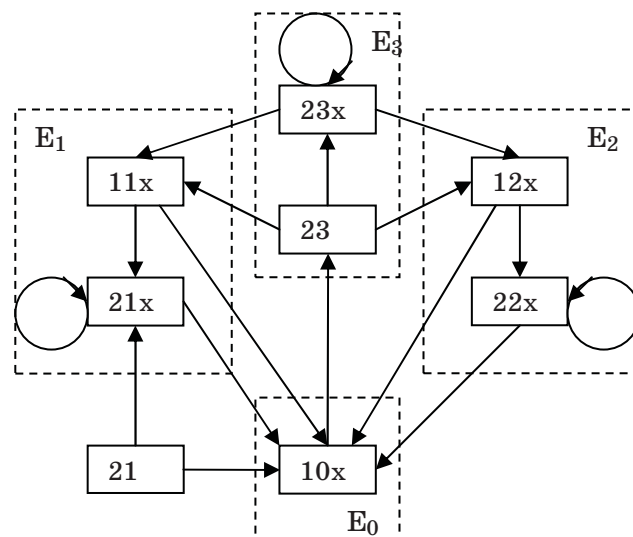


Рисунок 2 – Граф переходов системы

Времена пребывания системы в состояниях определяются формулами:

$\theta_{21} = \alpha \wedge \beta$, $\theta_{10x} = x$, $\theta_{11x} = \alpha \wedge x$, $\theta_{12x} = \gamma \wedge x$, $\theta_{21x} = \theta_{22x} = \theta_{23x} = \beta \wedge x$, $\theta_{23} = \beta \wedge \sigma$
 где $\wedge$ – знак минимума.

Выпишем вероятности и плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
 p_{21}^{21x} &= \int_0^\infty g(t)f(x+t)dt; & p_{21}^{10x} &= \int_0^\infty f(t)g(x+t)dt; & p_{21y}^{21x} &= g(y-x), x < y; & p_{21y}^{10x} &= g(y+x); \\
 p_{23}^{23x} &= \int_0^\infty g(t)\psi(t+x)dt; & p_{23}^{11x} &= p \int_0^\infty \psi(t)g(t+x)dt; & p_{23}^{12x} &= q \int_0^\infty \psi(t)g(t+x)dt; \\
 p_{23y}^{23x} &= g(y-x), x < y; & p_{23y}^{11x} &= pg(y+x); & p_{23y}^{12x} &= qg(y+x); & P_{10x}^{23} &= 1; \\
 p_{11y}^{10x} &= f(y-x), x < y; & p_{11y}^{21x} &= f(y+x); & p_{12y}^{10x} &= \phi(y-x), x < y; & p_{12y}^{22x} &= \phi(y+x); \\
 p_{22y}^{10x} &= g(y+x); & p_{22y}^{22x} &= g(y-x), x < y; & p_{12y}^{22x} &= \phi(y+x). & & (1)
 \end{aligned}$$

Обозначим через ρ_{21} и ρ_{23} значения стационарных распределений ВЦМ на состояниях 21 и 23 соответственно. Предположим существование стационарных плотностей $\rho(10x)$, $\rho(11x)$, $\rho(12x)$, $\rho(21x)$, $\rho(22x)$ и $\rho(23x)$ для состояний 10x, 11x, 12x, 21x, 22x и 23x соответственно.

Тогда, с учетом того, что для невозвратного состояния 21 $\rho_{21} \equiv 0$, система интегральных уравнений для нахождения стационарного распределения ВЦМ имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho(23x) &= \int_x^\infty \rho(23y)g(y-x)dy + \rho_{23} \int_0^\infty g(t)\psi(t+x)dt, \\
\rho(11x) &= p\rho_{23} \int_0^\infty \psi(t)g(t+x)dt + p \int_0^\infty \rho(23y)g(y+x)dy, \\
\rho(12x) &= q\rho_{23} \int_0^\infty \psi(t)g(t+x)dt + q \int_0^\infty \rho(23y)g(y+x)dy, \\
\rho(21x) &= \int_x^\infty \rho(21y)g(y-x)dy + \int_0^\infty \rho(11y)f(y+x)dy, \\
\rho(22x) &= \int_x^\infty \rho(22y)g(y-x)dy + \int_0^\infty \rho(12y)\phi(y+x)dy, \\
\rho(10x) &= \int_x^\infty \rho(11y)f(y-x)dy + \int_x^\infty \rho(12y)\phi(y-x)dy + \int_0^\infty (\rho(21y) + \rho(22y))g(y+x)dy, \\
\rho_{23} &= \int_0^\infty \rho(10x)dx, \quad \rho_{23} + \int_0^\infty [\rho(10x) + \rho(11x) + \rho(12x) + \rho(21x) + \rho(22x) + \rho(23x)]dx = 1.
\end{aligned} \right. \quad (2)$$

Последнее уравнение в системе (2) является условием нормировки.

Решением первого уравнения системы с точностью до постоянного множителя ρ_{23} является функция [6]

$$\rho(23x) = \rho_{23} \int_0^\infty h_g(t)\psi(x+t)dt, \quad (3)$$

где $h_g(t) = \sum_{n=1}^\infty g^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_g(t)$ рекуррентного потока, порожденного СВ β . Подставляя (3) во второе и третье уравнения системы, получаем

$$\rho(11x) = p\rho_{23} \int_0^\infty \psi(t)v_g(t,x)dt, \quad \rho(12x) = q\rho_{23} \int_0^\infty \psi(t)v_g(t,x)dt.$$

Здесь

$$v_g(t,x) = g(t+x) + \int_0^t g(t+x-s)h_g(s)ds$$

– плотность прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного СВ β [8]. Обозначим через $l(x)$ функцию

$$l(x) = \int_0^\infty \psi(t)v_g(t,x)dt,$$

тогда

$$\rho(11x) = p\rho_{23}l(x), \quad \rho(12x) = q\rho_{23}l(x). \quad (4)$$

Заметим, что $l(x)$ есть плотность СВ – равной величине первого перескока времени контроля качества последовательностью заявок (или величине времени между окончанием контроля качества обслуживания и моментом поступления следующей заявки в систему).

Подставляя $\rho(1|x)$ в четвертое уравнение системы (2) и решая его относительно $\rho(2|x)$, получаем

$$\rho(2|x) = p\rho_{23} \int_0^{\infty} f(x+y)h_g^{(1)}(y)dy, \quad (5)$$

где $h_g^{(1)}(t) = l(t) + \int_0^t l(t-s)h_g(s)ds$.

– плотность функции восстановления $H_g^{(1)}(t)$, процесса восстановления, порожденного СВ с плотностью распределения $l(t)$ и СВ β . Аналогично определяем

$$\rho(22|x) = q\rho_{23} \int_0^{\infty} \phi(x+y)h_g^{(1)}(y)dy. \quad (6)$$

Из шестого уравнения системы (2) с учетом найденных стационарных распределений имеем

$$\rho(10|x) = p\rho_{23} \int_0^{\infty} f(t)v_g^{(1)}(t,x)dt + q\rho_{23} \int_0^{\infty} \phi(t)v_g^{(1)}(t,x)dt. \quad (7)$$

Здесь $v_g^{(1)}(t,x) = l(x+t) + \int_0^t h_g^{(1)}(t-s)g(s+x)ds$ – плотность прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного СВ с плотностью распределения $l(t)$ и СВ β .

Постоянная ρ_{23} находится из условия нормировки и определяется формулой

$$\rho_{23} = \left[3 + \int_0^{\infty} H_g^{(1)}(t)(pf(t) + q\phi(t))dt + \int_0^{\infty} H_g(t)\psi(t)dt \right]^{-1}.$$

Отметим, что

$$\int_0^{\infty} H_g^{(1)}(t)f(t)dt, \quad \int_0^{\infty} H_g^{(1)}(t)\phi(t)dt, \quad \int_0^{\infty} H_g(t)\psi(t)dt$$

– среднее число потерянных заявок за время первичного, вторичного обслуживания и время контроля качества обслуживания заявки соответственно.

Нахождение стационарных характеристик системы. Разобьем фазовое пространство состояний E на следующие непересекающиеся подмножества состояний, соответствующие различным физическим состояниям прибора:

$E_0 = \{10x\}$ – прибор находится в состоянии ожидания заявки;

$E_1 = \{11x, 21x\}$, $E_2 = \{12x, 22x\}$ – проводится первичное или повторное обслуживание заявки прибором соответственно;

$E_3 = \{23, 23x\}$ – проводится диагностика качества обслуживания заявки.

Обозначим переходные вероятности ПМП $\xi(t)$ следующим образом:

$$\Phi(t, e, E_i) = P\{\xi(t) \in E_i / \xi(0) = e\}, \quad e \in E, \quad i = \overline{0, 3}.$$

В [4] доказано, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_i) = \int_{E_i} m(e) \rho(de) \left[\int_E m(e) \rho(de) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (8)$$

где $m(e)$ – среднее время пребывания ПМП $\xi(t)$ в состоянии $e \in E$.

Соответствующие математические ожидания (средние времена пребывания системы в состояниях) определяются формулами:

$$\begin{aligned} M\theta_{21} &= \int_0^\infty \bar{F}(t) \bar{G}(t) dt, \quad M\theta_{10x} = x, \quad M\theta_{11x} = \int_0^x \bar{F}(t) dt, \quad M\theta_{12x} = \int_0^x \bar{\Phi}(t) dt, \\ M\theta_{21x} &= M\theta_{22x} = M\theta_{23x} = \int_0^x \bar{G}(t) dt, \quad M\theta_{23} = \int_0^x \bar{G}(t) \bar{\Psi}(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом выражений (3) – (7) и (9) интегралы из формулы (8) принимают вид:

$$\begin{aligned} \int_{E_0} m(e) \rho(de) &= p\rho_{23} \left[M\beta \left(\int_0^\infty \hat{\Psi}(t) \hat{H}_g(t) dt + \int_0^\infty f(t) H_g^{(1)}(t) dt \right) - M\alpha - M\sigma \right] + \\ &+ q\rho_{23} \left[M\beta \left(\int_0^\infty \hat{\Psi}(t) \hat{H}_g(t) dt + \int_0^\infty \phi(t) H_g^{(1)}(t) dt \right) - M\gamma - M\sigma \right], \quad \hat{H}_g(t) = 1 + H_g(t), \\ \int_{E_1} m(e) \rho(de) &= p\rho_{23} \left[\int_0^\infty l(x) dx \int_0^x \bar{F}(t) dt + \int_0^\infty dx \int_0^x \bar{G}(t) dt \int_0^\infty f(x+y) h_g^{(1)}(y) dy \right] = \\ &= p\rho_{23} \left[\int_0^\infty \bar{L}(t) \bar{F}(t) dt + \int_0^\infty \bar{F}(y) dy \int_0^y \bar{G}(t) h_g^{(1)}(y-t) dt \right] = p\rho_{23} M\alpha, \\ \int_{E_2} m(e) \rho(de) &= q\rho_{23} \left[\int_0^\infty l(x) dx \int_0^x \bar{\Phi}(t) dt + \int_0^\infty dx \int_0^x \bar{G}(t) dt \int_0^\infty \phi(x+y) h_g^{(1)}(y) dy \right] = q\rho_{23} M\gamma, \end{aligned}$$

$$\int_{E_3} m(e) \rho(de) = \rho_{23} \int_0^\infty \bar{\Psi}(t) \bar{F}(t) dt + \int_0^\infty dx \int_0^x \bar{G}(t) dt \int_0^\infty \psi(x+y) h_g(y) dy = \rho_{23} M\sigma,$$

$$\int_E m(e) \rho(de) = \rho_{23} M\beta \left[\int_0^\infty \hat{\psi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty (pf(t) + q\phi(t)) H_g^{(1)}(t) dt \right].$$

Следовательно, финальные вероятности пребывания прибора в подмножествах состояний E_0 , E_1 , E_2 и E_3 равны соответственно

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_0) = 1 - \frac{M\sigma + pM\alpha + qM\gamma}{M\beta \left[\int_0^\infty \hat{\psi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty (pf(t) + q\phi(t)) H_g^{(1)}(t) dt \right]}, \\ p_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_1) = \frac{pM\alpha}{M\beta \left[\int_0^\infty \hat{\psi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty (pf(t) + q\phi(t)) H_g^{(1)}(t) dt \right]}, \\ p_2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_2) = \frac{qM\gamma}{M\beta \left[\int_0^\infty \hat{\psi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty (pf(t) + q\phi(t)) H_g^{(1)}(t) dt \right]}, \\ p_3 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_3) = \frac{M\sigma}{M\beta \left[\int_0^\infty \hat{\psi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty (pf(t) + q\phi(t)) H_g^{(1)}(t) dt \right]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем стационарные времена $T(E_i)$ пребывания системы в подмножествах состояний E_i , используя следующие формулы из [7]:

$$T(E_i) = \int_{E_i} m(e) \rho(de) \left[\int_{E \setminus E_i} \rho(de) P(e, E_i) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}. \quad (11)$$

Учитывая стационарные распределения (3) – (7), можно показать, что интегралы, входящие в знаменатели дробей формул (11), преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus E_0} \rho(de) P(e, E_0) &= \rho_{23}, \quad \int_{E \setminus E_1} \rho(de) P(e, E_1) = p\rho_{23}, \\ \int_{E \setminus E_2} \rho(de) P(e, E_2) &= q\rho_{23}, \quad \int_{E \setminus E_3} \rho(de) P(e, E_3) = \rho_{23}. \end{aligned}$$

Следовательно, стационарные времена пребывания системы в подмножествах состояний $E_i, i = \overline{0, 3}$, определяются формулами

$$\begin{aligned} T(E_0) &= M\beta \left[\int_0^\infty \hat{\psi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty (pf(t) + q\phi(t)) H_g^{(1)}(t) dt \right] - pM\alpha - qM\gamma - M\sigma, \\ T(E_1) &= M\alpha, \quad T(E_2) = M\gamma, \quad T(E_3) = M\sigma. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае, когда плотность СВ σ имеет вид $\psi(t) = \delta(t)$ (диагностика качества обслуживания не проводится) и с вероятностями $p = 1$ осуществляются их качественное обслуживание, характеристики системы (10) и (12) совпадают с найденными в работе [5].

Используя полученные результаты, выпишем стационарные характеристики частных СМО таких, как $M / M / 1 / 0$, $M / G / 1 / 0$, $E_2 / G / 1 / 0$ и $GI / M / 1 / 0$.

Система $M / M / 1 / 0$. Для данной СМО $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $g(t) = \mu e^{-\mu t}$, $\phi(t) = v e^{-v t}$,

$\psi(t) = \eta e^{-\eta t}$, $t \geq 0$. Формулы (10) и (12) принимают вид:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\mu}{\eta} + p \frac{\mu}{\lambda} + q \frac{\mu}{v} \right]^{-1}, \quad p_1 = \left[1 + \frac{\lambda}{p\mu} + \frac{\lambda}{p\eta} + \frac{q}{p} \frac{\lambda}{v} \right]^{-1},$$

$$p_2 = \left[1 + \frac{v}{q\mu} + \frac{v}{q\eta} + \frac{pv}{q\lambda} \right]^{-1}, \quad p_3 = \left[1 + \frac{\eta}{\mu} + \frac{p\eta}{\lambda} + \frac{q\eta}{v} \right]^{-1},$$

$$T(E_0) = \frac{1}{\mu}, \quad T(E_1) = \frac{1}{\lambda}, \quad T(E_2) = \frac{1}{v}, \quad T(E_3) = \frac{1}{\eta}.$$

Система $M / G / 1 / 0$. Если $g(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$, а СВ α , γ и σ имеют распределения общего вида, тогда

$$p_0 = [1 + \mu M\sigma + p\mu M\alpha + q\mu M\gamma]^{-1}, \quad p_1 = \frac{p\mu M\alpha}{1 + p\mu M\alpha + q\mu M\gamma + \mu M\sigma},$$

$$p_2 = \frac{q\mu M\gamma}{1 + p\mu M\alpha + q\mu M\gamma + \mu M\sigma}, \quad p_3 = \frac{\mu M\sigma}{1 + p\mu M\alpha + q\mu M\gamma + \mu M\sigma},$$

$$T(E_0) = \frac{1}{\mu}, \quad T(E_1) = M\alpha, \quad T(E_2) = M\gamma, \quad T(E_3) = M\sigma.$$

Система $E_2 / G / 1 / 0$. В случае, когда СВ β – время между поступлением заявок – имеет распределение Эрланга второго порядка: $g(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$, $t \geq 0$, а остальные СВ – распределения общего вида, характеристики (10) и (12) принимают вид:

$$p_0 = \frac{3 + \tilde{\psi}(2\mu) [p\tilde{f}(2\mu) + q\tilde{\phi}(2\mu)]}{3 + \tilde{\psi}(2\mu) [p\tilde{f}(2\mu) + q\tilde{\phi}(2\mu)] + 2\mu [M\sigma + pM\alpha + qM\gamma]},$$

$$p_1 = \frac{2\mu pM\alpha}{3 + \tilde{\psi}(2\mu) [p\tilde{f}(2\mu) + q\tilde{\phi}(2\mu)] + 2\mu [M\sigma + pM\alpha + qM\gamma]},$$

$$p_2 = \frac{2\mu qM\gamma}{3 + \tilde{\psi}(2\mu) [p\tilde{f}(2\mu) + q\tilde{\phi}(2\mu)] + 2\mu [M\sigma + pM\alpha + qM\gamma]},$$

$$p_3 = \frac{2\mu M\sigma}{3 + \tilde{\psi}(2\mu) [p\tilde{f}(2\mu) + q\tilde{\phi}(2\mu)] + 2\mu [M\sigma + pM\alpha + qM\gamma]},$$

$$T(E_0) = \frac{3}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} [p\tilde{f}(2\mu) + q\tilde{\phi}(2\mu)], T(E_1) = M\alpha, \quad T(E_2) = M\gamma, \quad T(E_3) = M\sigma,$$

где через $\tilde{\psi}(\cdot)$ обозначено изображение по Лапласу соответствующей функции-оригинала $\psi(\cdot)$: $\tilde{\psi}(z) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-zt} dt$.

Система GI / M / 1 / 0. Для данной системы входящий поток заявок порождается СВ β с плотностью $g(t)$ общего вида, а плотности распределений остальных СВ имеют вид: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $\phi(t) = \nu e^{-\nu t}$, $\psi(t) = \eta e^{-\eta t}$, $t \geq 0$.

Вычислим функционалы, входящие в формулы для нахождения стационарных характеристик системы. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \psi(t) \hat{H}_g(t) dt &= 1 + \int_0^{\infty} \bar{\Psi}(t) h_g(t) dt = 1 + \int_0^{\infty} e^{-\eta t} h_g(t) dt = 1 + \tilde{h}_g(\eta), \\ \int_0^{\infty} f(t) H_g^{(1)}(t) dt &= \int_0^{\infty} \bar{F}(t) h_g^{(1)}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h_g^{(1)}(t) dt = \frac{\tilde{l}(\lambda)}{1 - \tilde{g}(\lambda)} = \\ &= \frac{\eta}{\eta - \lambda} \frac{\tilde{g}(\lambda) - \tilde{g}(\eta)}{(1 - \tilde{g}(\lambda))(1 - \tilde{g}(\eta))} = \frac{\eta}{\eta - \lambda} (\tilde{h}_g(\lambda) - \tilde{h}_g(\eta)), \\ \int_0^{\infty} \phi(t) H_g^{(1)}(t) dt &= \int_0^{\infty} \bar{\Phi}(t) h_g^{(1)}(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\nu t} h_g^{(1)}(t) dt = \frac{\eta}{\eta - \nu} (\tilde{h}_g(\nu) - \tilde{h}_g(\eta)). \end{aligned}$$

Тогда стационарные характеристики системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{p}{\lambda} + \frac{q}{\nu}}{M\beta \left[1 + \tilde{h}_g(\eta) + \frac{p\eta}{\eta - \lambda} [\tilde{h}_g(\lambda) - \tilde{h}_g(\eta)] + \frac{q\eta}{\eta - \nu} [\tilde{h}_g(\nu) - \tilde{h}_g(\eta)] \right]}, \\ p_1 &= \frac{\frac{p}{\lambda}}{M\beta \left[1 + \tilde{h}_g(\eta) + \frac{p\eta}{\eta - \lambda} [\tilde{h}_g(\lambda) - \tilde{h}_g(\eta)] + \frac{q\eta}{\eta - \nu} [\tilde{h}_g(\nu) - \tilde{h}_g(\eta)] \right]}, \\ p_2 &= \frac{\frac{q}{\nu}}{M\beta \left[1 + \tilde{h}_g(\eta) + \frac{p\eta}{\eta - \lambda} [\tilde{h}_g(\lambda) - \tilde{h}_g(\eta)] + \frac{q\eta}{\eta - \nu} [\tilde{h}_g(\nu) - \tilde{h}_g(\eta)] \right]}, \\ p_3 &= \frac{\frac{1}{\eta}}{M\beta \left[1 + \tilde{h}_g(\eta) + \frac{p\eta}{\eta - \lambda} [\tilde{h}_g(\lambda) - \tilde{h}_g(\eta)] + \frac{q\eta}{\eta - \nu} [\tilde{h}_g(\nu) - \tilde{h}_g(\eta)] \right]}, \end{aligned}$$

$$T(E_0) = M\beta \left[1 + \tilde{h}_g(\eta) + \frac{p\eta}{\eta - \lambda} [\tilde{h}_g(\lambda) - \tilde{h}_g(\eta)] + \frac{q\eta}{\eta - \nu} [\tilde{h}_g(\nu) - \tilde{h}_g(\eta)] \right] - \frac{p}{\lambda} - \frac{q}{\nu} - \frac{1}{\eta}$$

$$, T(E_1) = \frac{1}{\lambda}, T(E_2) = \frac{1}{\nu}, T(E_3) = \frac{1}{\eta}.$$

Выводы. В данной работе построена полумарковская модель функционирования однолинейной системы обслуживания GI / G / 1 / 0 с потерями и контролем качества обслуживания. В случае некачественного обслуживания заявки она отправляется на повторное обслуживание. Использование при построении математической модели аппарата полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний позволило найти в явном виде такие стационарные характеристики системы, как финальные вероятности пребывания системы в состоянии ожидания заявки, в состоянии контроля качества обслуживания, в состояниях первичного и повторного обслуживания заявки; средние стационарные времена пребывания в данных состояниях. В качестве примеров выписаны формулы для определения стационарных характеристик для СМО с конкретными законами распределения случайных величин. В случае отсутствия контроля качества обслуживания и достоверном удовлетворительном качестве обслуживания заявок, найденные характеристики системы совпадают с ранее известными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов В.В. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем / В.В. Анисимов, О.К. Закусило, В.С. Донченко. – К. : Вища шк., 1987. – 248 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
3. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания / Дж. Риордан. – М.: Связь, 1966. – 184 с.
4. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 236 с.
5. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 209 с.
6. Обжерин Ю.Е. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания / Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 51–62.
7. Обжерин Ю.Е. Об однолинейной системе обслуживания с потерями и абсолютным приоритетом / Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 10. – С.107–115.
8. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.