УДК 622.647.82:51.001.57

Г.І. Ларіонов, Д.Д. Брагинець, Р.В. Кірія

# ДО АНАЛІЗУ РЕЗУЛЬТАТІВ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ БУНКЕРА-ПЕРЕВАНТАЖУВАЧА

*Анотація. В роботі продемонстровано використання методу послідовної апроксимації до результатів імітаційного моделювання роботи бункера-перевантажувача. Для обраних діапазонів змін параметрів отримано математичну модель у аналітичному виді. Оцінка відносних похибок математичної моделі показує хорошу для інженерних розрахунків точність.*

*Ключові слова: імітаційне моделювання, апроксимація, математична модель, відносна похибка*

Результати досліджень процесів з використанням математичного та імітаційного моделювання або чисельних методів у більшості випадків являють собою функції шуканих параметрів, заданих у вигляді таблиць. За даними таблиць значень функції і параметрів виконують побудову графічних залежностей функції від будь-якого параметру. Для з'ясування ступеню впливу на функцію процесу параметрів необхідно виконати її відтворення у аналітичній формі, тобто у вигляді формули. Побудова функції процесу в області її визначення здійснюється методами, які використовують їх значення на сітці параметрів. Для простих задач, тобто за невеликої кількості параметрів і незначних витрат часу на отримання значень функції у вузлі такої сітки побудова функції можлива методами апроксимації. Для більш складних задач отримання таблиці значень вихідної функції на сітці параметрів потребує значних обчислювальних витрат, що іноді унеможливлює процес її відтворення. Значних результатів у напрямку зменшення кількості обчислень функції досягла група вчених на чолі з професором Босовим А.А. Основна мета їх досліджень полягала у відтворені аналітичної форми функції за наявності таблиць числових даних за зміни параметрів лише у координатних площинах. Проблема відтворення функції не за значеннями її на сітці параметрів, а за меншої кількості обчислень її значень є і



 ISSN 1562-9945

буде актуальною незалежно від швидкості обробки інформації сучасною обчислювальною технікою.

Найбільш вдалою для оцінки впливу параметрів на процес, як показує досвід використання теорії розмірності та інженерної практики, є представлення її у вигляді добутку функцій, кожна з яких являє собою степеневу функцію одного параметру[1-2], або узагальненої функції Коба-Дугласа. Обмеження вибору степенів на класі степеневих функцій здійснювалось з використанням теорії розмірностей. Таким чином, побудова методу відтворення аналітичної форми наближеного представлення функції процесу, заданої таблично, у вигляді добутку функцій, кожна з яких є функцією одного параметру, є важливою проблемою для оцінювання впливу її параметрів на процес.

Розроблено метод, який дозволяє наближено відтворити функцію процесу за результатами його чисельного моделювання[1-2]. Задача розробки алгоритму виглядала наступним чином.

Нехай існує функція процесу $F = f(x_1, x_2 ... x_n)$, значення якої можуть бути отримані як у результаті чисельного, так і імітаційного моделювання. Необхідно відтворити її у аналітичному вигляді:

$$F = Ag_1(x_1)g_2(x_2)g_3(x_3)...g_n(x_n),$$

де $g_1(x_1), g_2(x_2), g_3(x_3), ..., g_n(x_n) \in C_{(a,b)}$; $x_i \in (a_i, b_i)$; $i \in \{1, \overline{n}\}$; $A$ – деяка стала.

Алгоритм відтворення аналітичної форми функції процесу за її табличними даними полягає у виконанні наступних дій:

1. У області визначення функції $F = f(x_1, x_2 ... x_n)$ обираємо точку $M(x^m{}_1, x^m{}_2 ... x^m{}_n)$; $x_i^0 \le x_i^m \le x_i^N$; $x_i^m = (x_i^N - x_i^0)/2$, де $x_i^0$ – початкове значення змінної $x_i$, а $x_i^N$ – кінцеве її значення; $N$ – кількість інтервалів, на які розбиваються діапазони значень змінних.

2. Утворюємо послідовності значень $\{x_1^j, F^j\}$ і відшукуємо функцію апроксимації $g_1(x_1)$ таким чином, що $F = a_1 g_1(x_1)$, де $a_1$ – стала апроксимації; $g(x_1)$ – функція апроксимації, яка залежить від змінної $x_1$.

3. Знаходимо послідовність значень $a_1$ за зміни наступного параметру $x_2$ у околі точки M і утворюємо послідовність $\{x_2^j, a_1^j\}$, де

$a_1^j = F^j / g_1\left(x^m{}_1\right)$, $g_1\left(x_1^m\right)$ – значення знайденої функції апроксимації для змінної $x_1$ у точці M. Відшукаємо функцію апроксимації $g_2\left(x_2\right)$ для утворених послідовностей таким чином, що $a_1 = a_2 g_2\left(x_2\right)$, де $a_2 = a\left(x_3 ... x_n\right)$. Тоді будемо мати $F = a_1 g\left(x_1\right) = a_2 g_1\left(x_1\right) g_2\left(x_2\right)$. Таким чином, послідовно утворюючи послідовності $\left\{x_i^j, a_{i-1}^j\right\}$, де $a_{i-1}^j = F^j / g_1\left(x^m{}_1\right) g_2\left(x^m{}_2\right) .. g_i\left(x^m{}_i\right)$, та повторюючи процедуру пошуку функцій апроксимації, врешті решт отримаємо

$$F = a_1 g\left(x_1\right) = a_2 g_1\left(x_1\right) g_2\left(x_2\right) = ... = a_n g_1\left(x_1\right) g_2\left(x_2\right) .. g_n\left(x_n\right).$$

Отримані вирази для похибки функції $f\left(x, y\right)$

$$E \le \frac{1}{\left|f_0\left(x_0, y_0\right)\right|}\left\{\frac{1}{4} N\left(K_1 + K_2\right)\left(\Delta_x + \Delta_y\right) + M_1\varepsilon_1 + M_2\varepsilon_2\right\}.$$

за умов обмеженості її та похідних і функцій добутку $f_1\left(x\right), f_2\left(y\right)$:

$$\max_{(x,y)\in\Delta_{x0}\times\Delta_{y0}}\left|f\left(x,y\right)\right| \le N; \quad \max_{x\in\Delta_{x0}}\left|f_1\left(x\right)\right| \le M_1; \quad \max_{y\in\Delta_{y0}}\left|f_2\left(y\right)\right| \le M_2;$$

$$\sup_{(x,y)\in\Delta_{x0}\times\Delta_{y0}}\left|\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \le K_1; \quad \sup_{(x,y)\in\Delta_{x0}\times\Delta_{y0}}\left|\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \le K_2;$$

$$\left|f_1\left(x\right) - f_1^*\left(x\right)\right| \le \varepsilon_1 \forall x \in \Delta_{x_0}; \quad \left|f_2\left(y\right) - f_2^*\left(y\right)\right| \le \varepsilon_2 \forall y \in \Delta_{y_0},$$

де $\Delta_x, \Delta_y$ – кроки у напрямку осей $X$ та $Y$ відповідно; $N$, $M_1$, $M_2$, $K_1$, $K_2$ – деякі числа; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – похибки апроксимації функцій добутку; $f_1^*\left(x\right)$ – значення функції за умови використання інтерполяційних поліномів.

Вираз для верхньої межі похибок функції процесу у вигляді ряду Тейлора та обмеження функцій добутку класом степеневих функцій має вид:

$$\max_{x\in\Delta_{x0}}\left|f_n\left(x_n^0\right) + f_n'\left(\xi\right)\left(x_n - x_n^0\right) - a_n x^{b_n}\right| \le \max_{x\in\Delta_{x0}}\left|f_n\left(x_n^0\right)\right|\left|1 - \left|\frac{x_n}{x_n^0}\right|^b\right| + \frac{1}{2} K_n \Delta_{xn},$$

де $f_n\left(x_0\right); K_n$ – значення функції та її обмеження для $n$-ої змінної; $f_n'\left(\xi\right), \Delta_{xn}$ – похідна функції та крок у напрямку осі $x_n$.

Перевірка похибок наближених представлень функцій процесу, заданих аналітично, з використанням методу послідовної апроксимації [1-2] підтвердила задовільну для інженерних розрахунків точність у околі обраної точки $M\left(x^m{}_1, x^m{}_2, ..., x^m{}_n\right)$. Але, як показує досвід використання методу послідовної апроксимації до практичних задач, точність його виявляється задовільною не тільки у околі точки, а й на всій області визначення. Цей факт дає підстави сподіватися у ефективності його використання на більш широкому класі практичних задач.

Використання методу послідовної інтерполяції до задач імітаційного моделювання роботи бункера-перевантажувача наведено нижче.

Процесс функціонування бункера-перевантажувача, згідно з [3], описується функцією середнього об'єму захисного шару вантажу за наступними формулами:

$$V_c = \frac{V_m t_з + V_p t_p}{t_c} + \frac{m_Q t_з^2 - \left(Q_p - m_Q\right) t_p^2}{2\gamma t_c},$$

де

$$t_c = t_з + t_p; \; t_з = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2};$$

$$\theta_1 = \frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_{01}} A_1; \; \theta_2 = \frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_{02}} A_2;$$

$$A_1 = \frac{1 + \left[\alpha\left(1 - \frac{k_1}{2}\right)\frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_{01}{}^2} + \frac{2k_1}{Q_{01}}\right]\sigma_Q}{1 + \left[\frac{\alpha\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_{01}{}^2} - \frac{2k_1}{Q_{01}}\right]\sigma_Q};$$

$$A_2 = \frac{1 - \left[\alpha\left(1 - \frac{k_1}{2}\right)\frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_{02}{}^2} + \frac{2k_1}{Q_{02}}\right]\sigma_Q}{1 - \left[\frac{\alpha\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_{02}{}^2} - \frac{2k_1}{Q_{02}}\right]\sigma_Q};$$

$$t_p = \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}; \; \theta_1' = \frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_p - Q_{01}} A_1'; \; \theta_2' = \frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{Q_p - Q_{02}} A';$$

$$A_1' = \frac{1 - \left[\alpha\left(1 - \frac{k_1}{2}\right)\frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{\left(Q_p - Q_{01}\right)^2} + \frac{2k_1}{Q_p - Q_{01}}\right]\sigma_Q}{1 - \left[\frac{\alpha\gamma\left(V_m - V_p\right)}{\left(Q_p - Q_{01}\right)^2} - \frac{2k_1}{Q_p - Q_{01}}\right]\sigma_Q};$$

$$A_2' = \frac{1+\left[\alpha\left(1-\frac{k_1}{2}\right)\frac{\gamma\left(V_m - V_p\right)}{\left(Q_p - Q_{02}\right)^2} + \frac{2k_1}{Q_p - Q_{02}}\right]\sigma_Q}{1+\left[\frac{\alpha\gamma\left(V_m - V_p\right)}{\left(Q_p - Q_{02}\right)^2} - \frac{2k_1}{Q_p - Q_{02}}\right]\sigma_Q};$$

$$Q_{01} = m_Q + k_1\sigma_Q;$$

$$Q_{02} = m_Q - k_1\sigma_Q.$$

Тут $m_Q$ – середня продуктивність магістрального вантажопотоку, т/хв; $\alpha$ – коефіцієнт кореляції вихідного вантажопотоку, с$^{-1}$; $\sigma_Q$ – середньо квадратичне відхилення вихідного вантажопотоку, т/хв; $V_m$ – максимальний об'єм захисного шару вантажу в бункері-перевантажувачі, м$^3$; $V_p$ – мінімальний об'єм захисного шару вантажу в бункері-перевантажувачі, м$^3$; $V_c$ – середній об'єм захисного шару вантажу в бункері-перевантажувачі, м$^3$; $\gamma$ – питома вага вантажу, т/м$^3$; $Q_p$ –продуктивність бункера-перевантажувача, т/хв; $k_1$ – коефіцієнт, який характеризує нерівномірність вантажупотоку, що заповнює бункер- перевантажувач ($k_1$ = 0,1).

Звертає на себе увагу той факт, що у випадку незначних, з точки зору практичних міркувань, змін функцій можна не відшукувати функцію апроксимації, а обирати її сталою і рівною величині середнього її значення на інтервалі визначення параметру.

Формула для визначення середнього обєму бункера-перевантажувача представлена нижче:

$$V_c = A\alpha_0 m_{Q0}\gamma_0\sigma_{\theta 0}\left(\Delta V_0 + \frac{2\Delta V}{\Delta V_0}\right)\left(\frac{V_p}{V_{p0}} + \frac{V_p}{8}\right)\left(Q_{p0} - \frac{Q_P}{7Q_{P0}}\right),$$

де $\Delta V = V_m - V_p$.

Тут $m_{Q0}$, $\alpha_0$, $\sigma_{Q0}$, $V_{p0}$, $\Delta V_0$, $Q_{p0}$, $\gamma_0$ – значення параметрів $m_Q$, $\alpha$, $\sigma_Q$, $V_p$, $\Delta V$, $Q_p$, $\gamma$ в початковій точці розрахунку.

На рис. 1 представлено графіки залежностей наближеної формули і оригіналу для вказаного діапазону змін грузопотоку.

Точність отриманих формул визначалась шляхом порівняння значень, отриманих згідно з оригіналом. Відносна похибка представлена на рис. 2.

Наближена функція отримана для параметрів, що знаходяться у межах (табл. 1).

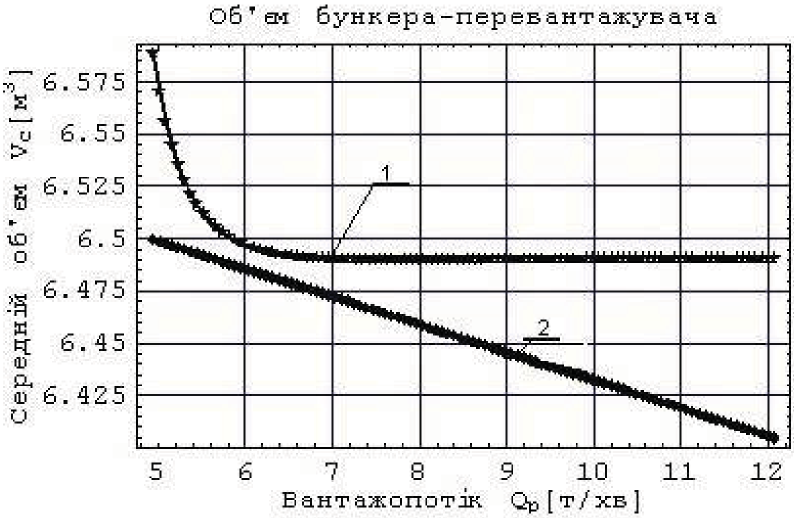


Рисунок 1 - Суміщений графік оригіналу і наближеного представлення:1 – теорія; 2 – наближення

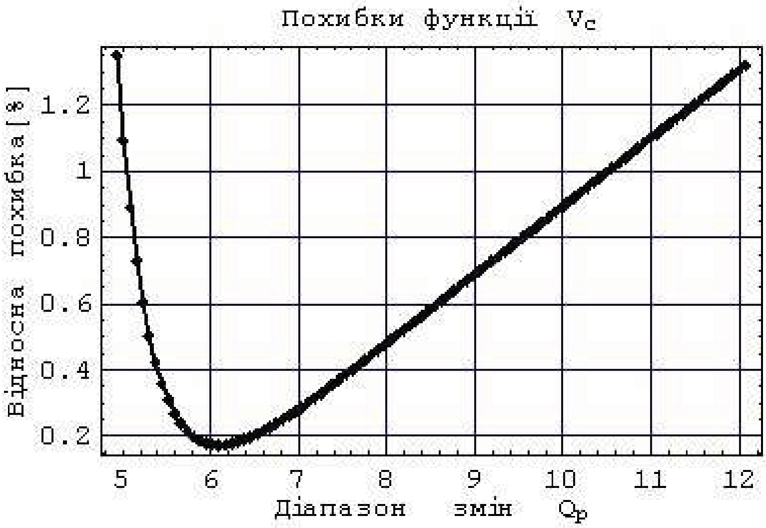


Рисунок 2 - Розподіл відносної похибки

Таблиця 1

Діапазони змін параметрів

| Параметри | Початкові значення | Значення в точці М | Кінцеві значення |
|---|---|---|---|
| $\gamma$ [т/м$^3$] | 0,8 | 1,4 | 2,0 |
| $\Delta V$ [м$^3$] | 2,0 | 4,0 | 6,0 |
| $V_p$ [м$^3$] | 4,0 | 4,5 | 5,0 |
| $\alpha$ [с$^{-1}$] | 0,1 | 0,14 | 0,18 |
| $m_Q$ [т/хв] | 3,0 | 3,5 | 4,0 |
| $Q_p$ [т/хв] | 4,8 | 8,4 | 12,0 |
| $\sigma_Q$ [т/хв] | 1,0 | 1,23 | 1,46 |

## Висновки

1. Встановлено можливість використання методу послідовної апроксимації для визначення середнього об’єму бункера-перевантажувача.

2. Відносна похибка формули, отриманої з використанням запропонованого методу, не перевищує 1,5%, що дозволяє з успіхом використовувати її замість системи імітаційного моделювання процесу роботи бункера-перевантажувача.

3. Пропонується у подальшому розширювати діапазон задач для представлення результатів чисельного та імітаційного моделювання з використанням вище означеного методу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Ларіонов Г.І. До аналізу результатів чисельного моделювання / Г.І. Ларіонов // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2010». - Дніпродзержинськ, 2010. – С. 153 (19-22 квітня 2010).
2. Ларіонов Г.І. Оцінювання впливу параметрів математичного моделювання / Г.І. Ларіонов // Материалы XVIII международной научно-технической конференции «Прикладные задачи математики и механіки». – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – С. 226-229 (13-17 сентября 2010).
3. Кирия Р.В. Определение оптимальной производительности разгрузки усредняющего бункера для поддержания в нем защитного слоя груза / Р.В. Кирия, Г.И. Ларионов, Д.Д. Брагинец // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. / ИГТМ НАНУ. - Днепропетровск, 2010 – Вып. 89.- С. 55-62.

 ISSN 1562-9945