УДК 620.179

В.П. Малайчук, А.И. Федорович

УМЕНЬШЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ РАЗЛИЧНОГО ВИДА ПРИ ПОМОЩИ СИНГУЛЯРНО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Аннотация. Исследованы возможности устранения аддитивной и модулирующей помех, различной мощности и в различных сочетаниях, по средствам сингулярно-спектрального анализа, а так же качество восстановления исходной зашумленной выборки, содержащей информацию о техническом состоянии объектов контроля.

Ключевые слова: ганкелева матрица, собственные числа, выборка измерений, мощность

Постановка задачи

В задачах неразрушающего контроля линейно-протяженных объектов со случайными параметрами информация об их состоянии содержится в выборках измерений, искаженных помехами разного вида. Одним из способов уменьшения влияния помех на результаты контроля является формирование матриц Ганкеля и их сингулярно-спектральный анализ [1]. В реальных условиях контроля выборки измерений представляют собой последовательности случайных величин с неизвестными статистическими закономерностями. Модель измерений ультразвукового контроля линейно протяженного объекта можно представить в виде

$$x(k) = m(k)\left(S_0(k) + \Delta S(k)\right) + n(k) \qquad (1)$$

$m(k)$ - модулирующая помеха, которая характеризует контакт датчика и поверхности объекта контроля; $S_0(k)$ - детерминированная составляющая; $\Delta S(k)$ - флуктуации, которые характеризую структуру металла; $n(k)$ - измерительный шум.

Рассмотрим задачу выделения детеринорованной составляющей. В этом случае выражение (1) запишется в виде

$$x(k) = m(k)\left(S_0(k)\right) + n(k)\,. \qquad (2)$$

Цель исследования – изучить возможности восстановления детерминированных выборок $S_0(k)$, уменьшая влияние аддитивной и модулирующей помех.

Сингулярно-спектральный анализ ганкелевых матриц используется для уменьшения влияния помех путем отбора собственных чисел и формирования сглаженных выборок измерений. Эта задача может быть решена путем проведения вычислительных экспериментов на основе моделей выборок с различными законами распределения.

Компьютерная модель и методика вычислительных экспериментов

Для проведения вычислительных экспериментов разработана компьютерная модель состоящая из пяти блоков: 1) блок генераторов для формирования выборок коррелированных случайных величин $S_0(k)$ с законами распределения вероятностей – Гаусса, Лапласа, Релея, экспоненциального; 2) блок зашумления исходного сигнала модулирующей и аддитивной помехами; 3) блок формирования матриц Ганкеля; 4) блок сингулярно-спектрального преобразования; 5) блок статистического анализа восстановленных последовательностей.

Коррелированные нормальные случайные величины описываются моделью Маркова

$$S(k) = rS(k-1) + \sigma^2\sqrt{1-r^2}\xi(k) \qquad (3)$$

где r - коэффициент корреляции; $\xi(k)$ - нормальные случайные величины с нулевым математическим ожидание и единичной дисперсией.

Последовательность Маркова с релеевским законом распределения формируется на основе (3) путем извлечения квадратного корня из суммы квадратов коррелированных нормальных случайных величин. Экспоненциальная последовательность формируется как сумма квадратов нормальных коррелированных случайных величин, а закон Лапласа – как разность экспоненциальных последовательностей.

Исходную коррелированную последовательность (3) с различными законами распределения вероятности, зашумляем аддитивной и модулирующей помехой в различных сочетаниях и различной мощности. Аддитивная помеха представляет собой приборный шум, и описывается независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и изменяющейся дисперсией ($\sigma_n^2 = 0.09 \div 0.81$). Модулирующая помеха характеризует контакт датчика и поверхности объекта контроля описывается бета-распределением

$$m(k) = 2\left[\frac{1}{2} - \mathrm{Cos}\left(\frac{1}{3}\left(\pi - \mathbf{arccos}\left(1 - p(k)\right)\right)\right)\right], \qquad (4)$$

где $p(k)$ - последовательность коррелированных случайных величин.

Из последовательности $x(1), x(2), \ldots, x(N)$ формируется матрица Ганкеля (с длиной окна L) $|X| = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{K-1} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_K \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \cdots & x_{N-1} \end{pmatrix}$. Величины L, N и K, связаны между собой следующим соотношением $K = N - L + 1$. Запишем уравнение для оценки собственных чисел

$$\mathbf{det}\left(|X||X|^T - \lambda|I|\right) = 0\,. \qquad (5)$$

Решая уравнения (5), получим корни λ_i - собственные числа матрицы $|S| = |X||X|^T$. Установлено, что собственные числа ганкелевых матриц образуют неубывающий ряд $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_L \geq 0$, где L - длина окна. Для проведения вычислительных экспериментов выбрано $L=5$. Определим ортонормированную систему собственных векторов ганкелевой матрицы, $U_1 \ldots U_L$ в соответствии с собственными числами. Пусть $|V_i| = |X^T||U_i| / \sqrt{\lambda_i}$, тогда набор $\sqrt{\lambda_i}$, $|U_i|$, $|V_i|$ - будем называть собственной тройкой сингулярного разложения исходной матрицы. Исходная матрица восстанавливается путем перемножения собственной тройки $|X_i^*| = \sqrt{\lambda_i}\,|U_i||V_i^T|$. Для восстановление исходного сигнала $S_0(k)$, проводим диагональное усреднение матриц $|X_i^*|$.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

При проведения вычислительных экспериментов полезный сигнал $S_0(k)$ искажался помехами различного вида, после чего проводились сингулярно-спектральный анализ и восстановление искаженного сигнала по различному числу ненулевых собственных чисел матрицы Ганкеля.

Для сравнения возможностей восстановления последовательностей с различными законами распределения вероятностей случайных

 ISSN 1562-9945

величин, использовано среднеквадратичное отклонения между исходной выборкой $S_0(k)$ и восстановленной.

$$\Delta = \frac{1}{N}\sum\left[S_0(k) - S_0^*(k)\right]^2, \qquad (6)$$

где $S_0(k)$ - исходная Марковская последовательность, $S_0^*(k)$ - восстановленная последовательность, $N = 25$ - длина выборки, количество реализаций равно 100 для каждого случая.

Рассматривается зашумление исходного сигнала четырьмя возможными способами: 1) к исходному сигналу добавляется только аддитивная помеха. В этом случае модель сигнала будет иметь вид $x(k) = S(k) + n(k)$; 2) к исходному сигналу добавляется только модулирующая помеха. В этом случае модель сигнала будет иметь вид $x(k) = (S(k))m(k)$; 3) к исходному сигналу добавляется модулирующая и аддитивная помеха, двумя различными способами $x(k) = (S(k))m(k) + n(k)$ или $x(k) = (S(k) + n(k))m(k)$.

Восстановление исходной последовательности по первому собственному числу позволяет значительно снизить влияние аддитивной помехи [1].

В таблице 1 приведен пример восстановления сигнала, с различными законами распределения вероятностей, искаженного только модулирующей помехой.

Таблица 1

Вид ЗРВ	$x(k) = (S(k))m(k)$					
	λ_1	$\lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$	$\sum_{i=1}^{5}\lambda_i$	Исход. ошибка
	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	
Гаусса	0,374	0,328	0,313	0,304	0,229	0,337
Лапласа	0,455	0,866	0,769	0,717	0,692	0,087
Релея	0,434	0,429	0,427	0,423	0,427	0,012
Экспоненциальный	0,827	0,375	0,199	0,101	0,051	0,022

Из таблицы 1 видно, что при помощи сингулярно-спектрального анализа не возникает уменьшение влияния модулирующей помехи.

Для устранения модулирующей помехи предложен следующий алгоритм. Искаженный сигнал перед сингулярным разложении необходимо прологарифмировать, то есть $\ln[x(k)] = \ln\left[(S(k))m(k)\right]$. Используя свойства логарифма от произведения получим $\ln[x(k)] = \ln[S_0(k)] + \ln[m(k)]$. Таким образом, мы получаем модулирующую помеху, которая прибавляется к полезному сигналу, а такого рода зашумления легко удаляются при помощи сингулярно-спектрального анализа. Единственное ограничение, которое накладывает данная методика, состоит в том, что логарифмировать возможно только сигналы не содержащие отрицательных значений. В таблице 2 приведены результаты сингулярного разложения и последующего восстановления логарифмированных последовательностей с экспоненциальным и релеевским распределениями вероятности.

Таблица 2

Вид ЗРВ	$\mathbf{ln}\left[x(k)\right]=\mathbf{ln}\left[S_0(k)\right]+\mathbf{ln}\left[m(k)\right]$					
	λ_1	$\lambda_1+\lambda_2$	$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$	$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$	$\sum_{i=1}^{5}\lambda_i$	Исход. ошибка
	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	
Релея	0,091	0,043	0,024	0,013	0,007	0,007
Экспоненциальный	0.463	0.257	0.1	0.09	0.031	0.023

Сравнивая соответствующие значения в таблицах 1 и 2 легко заметить, что ошибка восстановления, при логарифимировании искаженного модулирующей помехой сигнала, уменьшается в 50 раз, при использовании для восстановления всех ненулевых собственных чисел матрицы Ганкеля.

Выводы

1. Использование сингулярно-спектрального анализа позволяет избавится от зашумления аддитивной помехой. Модулирующую помеху можно устранить путем применения предварительного логарифмирования к искаженному сигналу.

2. При малых дисперсиях гауссова шума ($\sigma_n = 0.3 \div 0.5$) наиболее эффективно восстанавливается исходная выборка по всем ненулевым собственным числам матрицы Ганкеля. При увеличении дисперсии аддитивной помехи ($\sigma_n = 0.7 \div 0.9$) наиболее точное восстановление получается при использовании только первого и второго собственного числа.

3. Ошибка восстановления исходного сигнала зависит от вида закона распределения вероятностей Марковской последовательности. Для симметричных и слабо асимметричных законов она составляет 0,2-0,3, при исходной ошибки 0,8. А для сильно асимметричных законов – 0,6, при исходной ошибки 0,9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голядина Н.Э. Метод «Гусеница» - SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. - СПб., 2004. – 76с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика / А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2006. – 816 с.

 ISSN 1562-9945