

А.В. Кошулян, В.П. Малайчук

## СИНГУЛЯРНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАМКНУТЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЯДОВ

Представлен модифицированный алгоритм для сингулярного спектрального анализа замкнутых пространственных рядов. Исследована работа алгоритма на измерениях остаточных напряжений железнодорожных колес и измерениях напряженности магнитного поля сварных швов, которые представляют собой замкнутые пространственные ряды.

Ключевые слова: сингулярный спектральный анализ, SSA-Гусеница, замкнутый ряд

### Постановка задачи

Одним из методов анализа рядов является сингулярный спектральный метод известный под названием "SSA- Гусеница". Данный алгоритм успешно применяется для анализа временных рядов. Его суть заключается в следующем. Для анализа временного ряда выбирается целый параметр  $L$ , называемый "длина окна". Затем на основе ряда строится траекторная матрица, столбцами которой являются скользящие отрезки ряда длины  $L$ : с первой точки по  $L$ -ю, со второй по  $(L+1)$ -ю и т.д. Следующий шаг - это сингулярное разложение траекторной матрицы в сумму элементарных матриц. Каждая элементарная матрица задается набором из собственного числа и двух сингулярных векторов - собственного и факторного. Затем полученные матрицы группируются и суммируются. После процедуры диагонального усреднения от результирующих матриц переходят к рядам. Каждый такой ряд будет содержать аддитивную составляющую исходного ряда, например, тренд, периодику, шум и т.п. Таким образом исходный ряд раскладывается на сумму элементарных рядов, что позволяет выделить ряды с интересующими исследователя составляющими исходного ряда[1][2].

Под замкнутым вещественным рядом длины  $N$  будем понимать ряд вещественных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_N; j = [1, N], j \in Z, N \in Z;$

$x_j \in \mathbb{R}$ , где после элемента  $x_N$ , снова следует элемент  $x_1$ , что замыкает ряд. Таким образом, к любому члену ряда от заданного можно перейти двумя способами, либо через правый либо через левый от него элемент. Вещественные ряды с подобными свойствами на практике получаются при измерении параметров пространственных объектов. Например, в неразрушающем контроле для оценки качества используются измерения напряженности магнитного поля рассеяния в области сварных швов. Так если это, например, сварочное соединения двух труб, то полученные измерения напряженности по окружности сварного шва будут обладать описанным выше свойством. Еще один пример, который используется для демонстрации рассматриваемого алгоритма - это ультразвуковые измерения остаточных напряжений по окружности железнодорожных колес. Свойство замкнутости может быть приписано ряду, когда связь между первыми и последними элементами ряда присутствует на уровне его структуры, например, когда при подсчете коэффициента автокорреляции порядка  $r(1,2)$  может быть учтена связь между первым и последним элементом такого ряда, т.е. соответствующее скалярное произведение будет иметь вид  $R(1,2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_jx_{j+1} + \dots + x_{N-1}x_N + x_Nx_1$ , т.е. появился один добавочный член  $x_Nx_1$ , учитывающий связь между первым и последним элементом ряда. При подсчете коэффициентов автокорреляции более высокого порядка количество таких добавочных членов увеличивается, например при подсчете коэффициента  $r(1,3)$  появляется уже два добавочных члена  $R(1,3) = x_1x_3 + x_2x_4 + \dots + x_jx_{j+2} + \dots + x_{N-2}x_N + x_{N-1}x_1 + x_Nx_2$ . При этом термины "первый" и "последний" член ряда, в данном случае являются относительными, и не имеет значение какой из членов, считать первым, а какой последним. В этом и заключается основное отличие рассматриваемых замкнутых пространственных рядов от временных рядов, либо пространственных рядов, не обладающих указанным свойством замкнутости, например измерений линейно-протяженных объектов.

Описанный базовый алгоритм сингулярного спектрального анализа при большой длине окна  $L$  дает несколько неожиданные результаты при анализе рядов, которые обладают описанным свойством замкнутости. На рис.1.а в полярной системе координат представлены измерения остаточных напряжений (МПа) железнодорожного колеса

(всего  $N = 25$  измерений) и с помощью базового алгоритма получена восстановленная компонента ряда по первому (максимальному) сингулярному числу. Аналогично на рис.1.б представлены измерения напряженности магнитного поля рассеяния (А/м) по окружности сварного соединения патрубка с трубой (всего  $N = 74$  измерений). Длина окна  $L$  в каждом случае выбиралась максимальной и равной величине  $N/2$  округленной вниз, что согласно [1] обеспечивает наиболее детальное разложение исходного ряда.

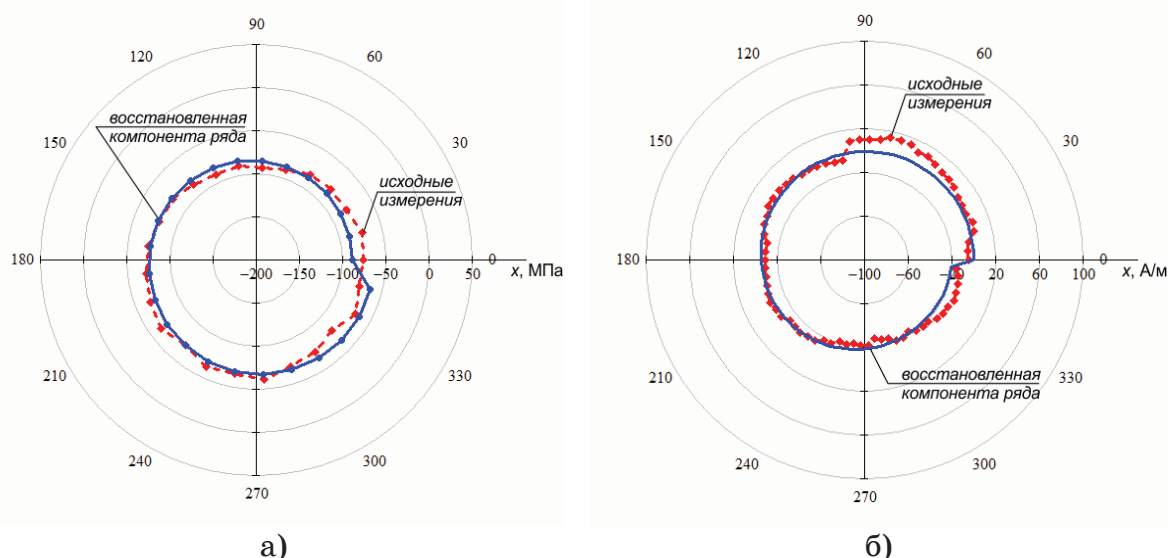


Рисунок 1 - Исходные измерения параметров пространственных объектов и ряд восстановленный по 1-му (максимальному) сингулярному числу с помощью базового алгоритма:

- а) измерения остаточных напряжений железнодорожного колеса;
- б) измерения напряженности магнитного поля сварного соединения трубы с патрубком

По рисунку 1 можно заметить, что в области перехода от точки  $N$  к точке 1 присутствует не обоснованный исходным рядом скачок. По анализу около полусотни рядов измерений данных объектов было обнаружено, что подобный скачек, если существует, то только в области перехода от точки  $N$  к точке 1, что не может быть обусловлено структурой самого ряда: номер точки измерения, является случайным по своей природе, поскольку сами позиции измерений никак не привязаны к объектам измерений, и номер первого измерения выбирался произвольно для каждого объекта. Также следует заметить, что при такой большой длине окна, обеспечивающей детальное разложение исходного ряда, наличие скачков в ряде, восстановленном по максимальному сингулярному числу, маловероятно, т.к. такой ряд

должен содержать только медленно меняющиеся компоненты [1]. Избежать скачка в восстановленном ряде можно либо уменьшая размер окна  $L$  и соответственно получая менее детальное разложение исходного ряда либо путем модификации базового алгоритма, с учетом специфики рассматриваемых рядов.

### Модификация базового алгоритма

Модификация базового алгоритма направлена на то, чтобы учесть замкнутость исходного ряда. В базовом алгоритме определяется сингулярное разложение матрицы  $S = XX^T$ , где  $X$  - траекторная матрица составленная из исходного ряда

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_K \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{K+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \cdots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_L \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{L+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_K & x_{K+1} & x_{K+2} & \cdots & x_N \end{pmatrix},$$

где  $K=N-L+1$ . Каждый элемент матрицы  $S$  представляет собой скалярное произведение элементов исходного ряда, т.е. по сути частичные ненормированные ковариации -  $R^*(i,j) = s_{i,j} = x_i \cdot x_j$  или скалярное произведение строк траекторной матрицы. Таким образом базовый алгоритм не учитывает возможные для замкнутых рядов ковариации, включающие добавочные члены, вроде  $x_{N-1}x_1$  или  $x_Nx_2$ . Данная информация может быть учтена, если модифицировать базовый алгоритм составления траекторной матрицы и алгоритм диагонального усреднения.

В модификации базового алгоритма предлагается для выбранной длины окна  $L$  исходный ряд  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N$  представить в виде последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N, x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N$ , после чего по стандартному алгоритму составить траекторную матрицу для  $L \leq N/2$ . Полученная траекторная матрица размером  $L \times K$ ,  $K=2N-L+1$ , примет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_L & x_{L+1} & \dots & x_{N-L+1} & x_{N-L+2} & \dots & x_N & x_1 & x_2 & \dots & x_{N-L+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{L+1} & x_{L+2} & \dots & x_{N-L+2} & x_{N-L+3} & \dots & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{N-L+2} \\ x_3 & x_4 & \dots & x_{L+2} & x_{L+3} & \dots & x_{N-L+3} & x_{N-L+4} & \dots & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{N-L+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L-1} & x_L & \dots & x_{2L-2} & x_{2L-1} & \dots & x_{N-1} & x_N & \dots & x_{L-2} & x_{L-1} & x_L & \dots & x_{N-1} \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_{2L-1} & x_{2L} & \dots & x_N & x_1 & \dots & x_{L-1} & x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

Каждый элемент матрицы  $S = XX^T$  представляет собой скалярное произведения строк матрицы  $X$ . Таким образом добавочные коэффициенты ковариации, как можно видеть, будут учтены.

Модифицированная процедура диагонального усреднения предназначена для перевода в ряд матрицы  $\tilde{Y}$ , которая представляет собой суммы элементарных матриц сингулярного разложения. Каждая такая матрица имеет такой же размер как и матрица  $X$ , а именно  $L$  строк и  $K=2N-L+1$  столбцов. Каждый элемент ряда размером  $N$  получается усреднением  $N$  побочных диагоналей размером  $L$ : первую диагональ образуют элементы матрицы  $y_{L, N/2-L+2}, \dots, y_{L-i, N/2-L+2+i}, \dots, y_{1, N/2+1}$ , последнюю  $y_{L, 3N/2-L+1}, \dots, y_{L-i, 3N/2-L+1+i}, \dots, y_{1, 3N/2}$ ,  $i \in Z$ . Таким образом в ряд переводится только центральная часть матрицы  $\tilde{Y}$ . Формула для перевода матрицы  $\tilde{Y}$  в ряд  $\tilde{x}$

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{y}_{i, j+N-i+1}, & \text{если } 1 \leq j < \frac{N}{2} + 1, \\ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{y}_{i, j-i+1}, & \text{если } \frac{N}{2} + 1 \leq j \leq N, \\ j \in [1, N], j \in Z, N \in Z; \end{cases}$$

где отношение  $\frac{N}{2}$  округляется вниз.

На рис.2, показаны результаты разложения модифицированным алгоритмом тех же рядов, что использовались для рис.1. Как видно в области перехода от точки  $N$  к точке  $1$  скачки, как в случае с базовым алгоритмом, отсутствуют.

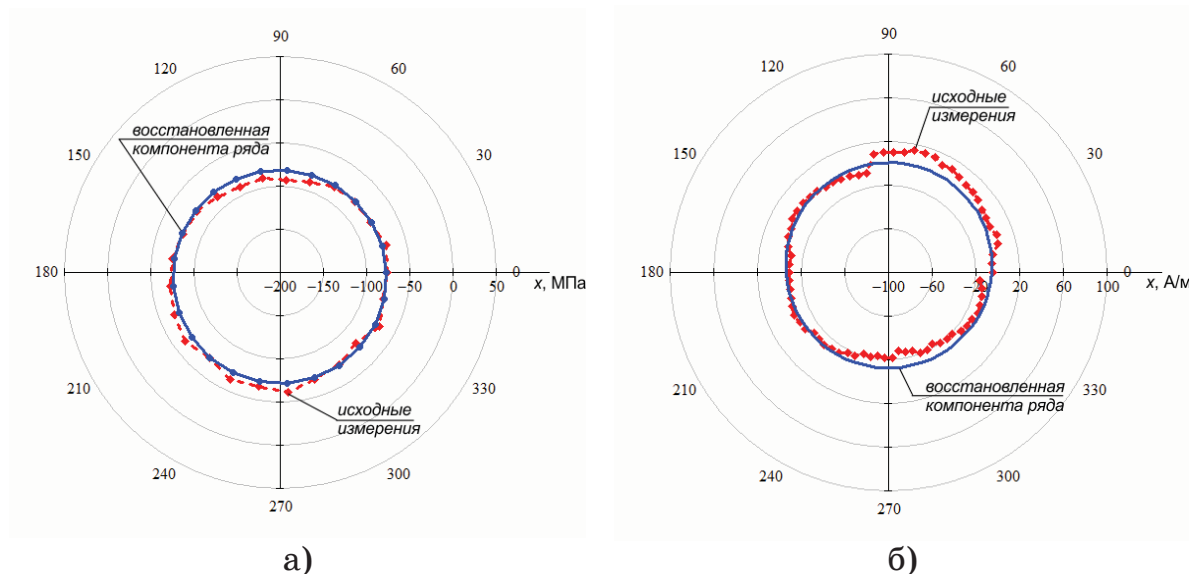


Рисунок 2 - Исходные измерения параметров пространственных объектов и ряд восстановленный по 1-му (максимальному) сингулярному числу с помощью модифицированного алгоритма:  
 а) измерения остаточных напряжений железнодорожного колеса;  
 б) измерения напряженности магнитного поля сварного соединения трубы с патрубком

### Выводы

1. Базовый алгоритм сингулярного спектрального анализа "SSA-Гусеница", предназначенный для анализа временных рядов, может быть модифицирован с учетом специфики замкнутых пространственных рядов и использован для разложения их на аддитивные замкнутые составляющие.

2. Дальнейшие исследования направлены на изучение возможностей предложенного алгоритма для анализа нестационарных циклических марковских процессов, содержащих периодические, трендовые и шумовые составляющие.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Голяндина Н.Э. Метод "Гусеница"-SSA: анализ временных рядов: Учебное пособие/ Голяндина Н.Э. -СПб.:Издательство СПбГУ, 2004. - 76с.
2. Крянев В.Г. Математические методы обработки неопределенных данных: Монография /Крянев В.Г., Лукин Г.В. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 216с.