УДК 551.501

В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский, В.В. Скалозуб,

Ю.В. Доронина

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ С УЧЕТОМ БЛОКИРОВОК УСТРОЙСТВ

Аннотация. В статье рассматривается полумарковская модель функционирования укрупненной информационной системы с учетом взаимных блокировок входящих в нее устройств. Определена функция распределения времени, затрачиваемого вторым устройством на сбор информации с учетом его блокировок первым устройством и возможным повторным сбором данных с устройств предварительной обработки.

Ключевые слова: информационная система, устройство сбора данных, устройство обработки данных, полумарковская модель, производительность системы, блокировки устройств

Исследование производительности сложных информационных систем (ИС), например, связанных с манипулированием данными в базах данных и запросами пользователя, целесообразно проводить с учетом блокировок логических или физических устройств, составляющих ИС. Рассматривается ИС, которая содержит два устройства. Устройство 1 (обработки данных при запросе пользователя) работает постоянно, вне зависимости от устройства 2 (сбора данных). Устройство 2 блокируется устройством 1 (ждет момента окончания обслуживания на устройстве 1 и далее оба устройства начинают работать вместе). С вероятностью р устройство 2 работает корректно, а с вероятностью (1-р) устройство сбора данных даст сбой и начнет повторный сбор данных. В момент начала повторного обслуживания оба устройства начинают также работать вместе.

На рисунке 1 представлен граф такой системы.

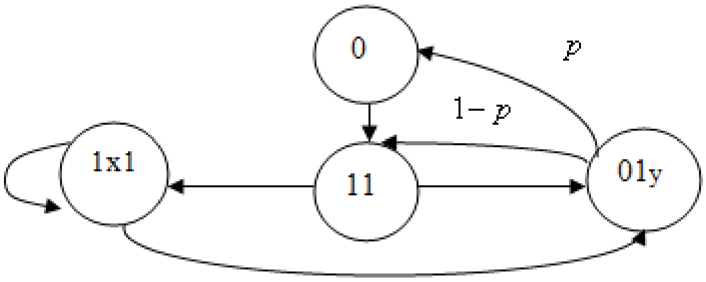

Рисунок 1 - Граф состояний укрупненной информационной системы

Предполагается, что информация с устройства 2 на устройство 1 передается мгновенно, а устройство 1 считается абсолютно надежным, т.к. в системе имеется аппаратное резервирование, устройство 2 может давать сбои. Время обработки данных на некотором устройстве - случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t)$. Время сбора данных - СВ α_2 с ФР $F_2(t)$. СВ α_1, α_2 предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у ФР $F_1(t), F_2(t)$ существуют плотности $f_1(t), f_2(t)$.

Определим полумарковские ядра Q(t,x,B) ПМВ $\{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$ в дифференциальной форме[1,2].

$$Q(s,11,1_x1) = f_1(s+x)f_2(s)ds; \quad Q(s,11,01_y) = f_1(s)f_2(s+y)ds;$$

$$Q(t,1_x1,1_v1) = f_2(x-v)1_{x-v}(t)dv; \quad Q(t,1_x1,01_v) = f_2(x+y)1_x(t)dy;$$

$$Q(t,01_y,0) = p1_y(t); \quad Q(t,01_y,11) = (1-p)1_y(t).$$

$$\bar{1}_x(t) = \begin{cases} 1, t \leq x \\ 0, t > x \end{cases} \qquad \bar{1}_y(t) = \begin{cases} 1, t \leq y; \\ 0, t > y; \end{cases} \qquad \overline{\Phi}_{1_x1}(x,t) = \begin{cases} 1, & t \leq x \\ \overline{\Phi}_{1_x1}(x,t), & t > x \end{cases}.$$

Составляются уравнения марковского восстановления (УМВ) для определения функций распределения $\overline{\Phi}_{11}(t), \overline{\Phi}_{1_x1}(t), \overline{\Phi}_{01_y}(t)$ времен пребывания в подмножестве $E_+ = \{11,\ 1x1,\ 01y\}$. Соответствующие функции распределения находятся с учетом того0, что

$$\overline{\Phi}_{11}(t), \overline{\Phi}_{1_x1}(t), \overline{\Phi}_{01_y}(t)\ , \quad \begin{matrix} \overline{\Phi}_{11}(t) = 1 - \Phi_{11}(t); \overline{\Phi}_{1_x1}(x,t) = 1 - \Phi_{1_x1}(x,t); \\ \overline{\Phi}_{01_y}(y,t) = 1 - \Phi_{01_y}(y,t). \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \overline{\Phi}_{11}(t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_1(x+s) f_2(s) \overline{\Phi}_{1_x 1}(x, t-s) dx ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_1(s) f_2(y+s) \overline{\Phi}_{01_y}(y, t-s) dy ds + \\ + \overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t), \qquad (1) \\ \overline{\Phi}_{1_x 1}(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_2(x-v) 1_{x-v}(ds) \overline{\Phi}_{1_v 1}(v, t-s) dv + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_2(x+y) 1_x(ds) \overline{\Phi}_{01_y}(y, t-s) dy + \\ + \overline{1}_x(t)\overline{F}_2(t), \qquad (2) \\ \overline{\Phi}_{01_y}(y,t) = (1-p)\overline{\Phi}_{11}(t-y) + p\overline{1}_y(t) \qquad (3) \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение (1), первый член которого равен:

$$\int\limits_0^t f_2(s) ds \int\limits_0^{t-s} f_1(s+x) \overline{\Phi}_{1_x 1}(x, t-s) dx + \int\limits_0^t f_2(s) ds \int\limits_{t-s}^\infty f_1(s+x) \cdot 1 \cdot dx;$$

Второй член выражения равен:

$$\int\limits_0^t f_2(s) ds \int\limits_t^\infty f_1(x') dx' = \overline{F}_1(t) \int\limits_0^t f_2(s) ds = \overline{F}_1(t) F_2(t) = \overline{F}_1(t) - \overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t);$$

Тогда первый член уравнения (1) принимает вид:

$$\int\limits_0^t f_2(s) ds \int\limits_0^{t-s} f_1(s+x) \overline{\Phi}_{1_x 1}(x, t-s) dx + \overline{F}_1(t) - \overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t);$$

Второй член уравнения (1) с учетом подстановки в него уравнения (3):

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_1(s) f_2(y+s) \left[(1-p)\overline{\Phi}_{11}(t-y-s) + p\overline{1}_y(t-s)\right] dy ds = \\ &= \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_1(s) f_2(y+s)(1-p)\overline{\Phi}_{11}(t-y-s) dy ds + \qquad (4) \\ &+ \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_1(s) f_2(y+s) p\overline{1}_y(t-s) dy ds \end{aligned}$$

Рассмотрим второй член этого выражения (4)

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_1(s) f_2(y+s) p\overline{1}_y(t-s) dy ds = p\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s} f_1(s) f_2(y+s) \cdot 0 \cdot dy ds + \\ &+ p\int\limits_0^t\int\limits_{t-s}^\infty f_1(s) f_2(y+s) \cdot 1 \cdot dy ds = p\int\limits_0^t\int\limits_{t-s}^\infty f_1(s) f_2(y+s) \cdot 1 \cdot dy ds = \\ &= p\int\limits_0^t f_1(s) ds \int\limits_t^\infty f_2(y') dy' = p\overline{F}_2(t) \int\limits_0^t f_1(s) ds = p\overline{F}_2(t) F_1(t) = \\ &= p\left[\overline{F}_2(t) - \overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t)\right] \end{aligned}$$

Рассмотрим первый член выражения (4)

 ISSN 1562-9945

$$\int_0^t\int_0^\infty f_1(s)f_2(y+s)(1-p)\overline{\Phi}_{11}(t-y-s)dyds =$$

$$=(1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_0^{t-s} f_2(y+s)\overline{\Phi}_{11}(t-(y+s))dy =$$

$$=(1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_0^{t-s} f_2(y')\overline{\Phi}_{11}(t-y')dy' =$$

$$=(1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_s^t f_2(q)\overline{\Phi}_{11}(t-q)dq.$$

Тогда второй член уравнения (1) равен

$$\int_0^t\int_0^\infty f_1(s)f_2(y+s)\overline{\Phi}_{01_y}(y,t-s)dyds = (1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_s^t f_2(q)\overline{\Phi}_{11}(t-q)dq +$$

$$+p\left[\overline{F}_2(t)-\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t)\right].$$

Окончательно уравнение (1) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_{11}(t) &= \int_0^t f_2(s)ds\int_0^{t-s} f_1(s+x)\overline{\Phi}_{1_x1}(x,t-s)dx+\overline{F}_1(t)-\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t)+\\
&+(1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_s^t f_2(q)\overline{\Phi}_{11}(t-q)dq+p\left[\overline{F}_2(t)-\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t)\right]+\\
&+\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t) = \int_0^t f_2(s)ds\int_0^{t-s} f_1(s+x)\overline{\Phi}_{1_x1}(x,t-s)dx+\overline{F}_1(t)+\\
&+(1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_s^t f_2(q)\overline{\Phi}_{11}(t-q)dq+p\left[\overline{F}_2(t)-\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t)\right]
\end{aligned} \qquad (5)$$

Рассмотрим второе уравнение (2)

$$\overline{\Phi}_{1_x1}(t) = \int_0^t\int_0^x f_2(x-v)1_{x-v}(ds)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-s)dv +$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty f_2(x+y)1_y(ds)\left[(1-p)\overline{\Phi}_{11}(t-s-y)+p\overline{1}_y(y,t-s)\right]dy+\overline{F}_2(t)\overline{1}_x(t);$$

Первый член уравнения (2)

$$\int_0^t\int_0^x f_2(x-v)1_{x-v}(ds)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-s)dv = \int_0^x f_2(x-v)dv\int_0^t\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-s)1_{x-v}(ds)$$

С учетом выражения для интеграла Сильтьеса $\int_0^t\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-s)1_{x-v}(ds) = \overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-x+v);$ первый член уравнения (2) равен:

$$\int_0^t\int_0^x f_2(x-v)1_{x-v}(ds)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-s)dv = \int_0^x f_2(x-v)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-x+v)dv$$

Второй член уравнения (2):

$$(1-p)\int_0^t\int_0^\infty f_2(x+y)1_x(ds)\overline{\Phi}_{11}(t-y-s)dy + \\ +p\int_0^t\int_0^\infty f_2(x+y)1_x(ds)\overline{1}_y(y,t-s)dy. \qquad (6)$$

Первый член уравнения (6) имеет вид:

$$(1-p)\int_0^t f_2(x+y)dy\int_0^\infty \overline{\Phi}_{11}(t-y-s)1_x(ds) =$$

$$=(1-p)\int_0^{t-x} f_2(x+y)\int_0^\infty \overline{\Phi}_{11}(t-x-y)dy = (1-p)\int_x^t f_2(y')\overline{\Phi}_{11}(t-y')dy' =$$

$$=(1-p)\int_x^t f_2(\tau)\overline{\Phi}_{11}(t-\tau)d\tau$$

Второй член уравнения (6) равен:

$$p\int_0^t\int_0^\infty f_2(x+y)1_x(ds)\overline{1}_y(y,t-s)dy = p\int_0^\infty f_2(x+y)dy\int_0^t \overline{1}_y(y,t-s)1_x(ds).$$

Выражение для интеграла Сильтьеса имеет вид $\int_0^t \overline{1}_y(t-s)1_x(ds) = \overline{1}_y(t-x)$.

Тогда

$$p\int_0^\infty f_2(x+y)dy\int_0^t \overline{1}_y(t-s)1_x(ds) = p\int_0^\infty f_2(x+y)\overline{1}_y(t-x)dy = p\int_{t-x}^\infty f_2(x+y)dy =$$

$$= p\int_t^\infty f_2(y')dy' = pF(y')\Big|_t^\infty = p\overline{F}_2(t).$$

Второй член уравнения (2) равен:

$$(1-p)\int_0^t\int_0^\infty f_2(x+y)1_x(ds)\overline{\Phi}_{11}(t-y-s)dy +$$

$$+p\int_0^t\int_0^\infty f_2(x+y)1_x(ds)\overline{1}_y(y,t-s)dy = (1-p)\int_x^t f_2(y)\overline{\Phi}_{11}(t-y)dy + p\overline{F}_2(t).$$

Окончательно уравнение (1) имеет вид:

$$\overline{\Phi}_{1_x1}(t) = \int_0^x f_2(x-v)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-x+v)dv + (1-p)\int_x^t f_2(y)\overline{\Phi}_{11}(t-y)dy +$$

$$+p\overline{F}_2(t) + \overline{F}_2(t)\overline{1}_x(t);$$

Учитывая, что $t > x$: $\overline{F}_2(t)\overline{1}_x(t) = 0$. Тогда

 ISSN 1562-9945

$$\overline{\Phi}_{1_x1}(t)=\int_0^x f_2(x-v)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-x+v)dv+(1-p)\int_x^t f_2(y)\overline{\Phi}_{11}(t-y)dy+ \tag{7}$$
$$+p\overline{F}_2(t);$$

Система уравнений (1-3) преобразуется к виду:

$$\begin{cases}\overline{\Phi}_{11}(t)=\int_0^t f_2(s)ds\int_0^{t-s} f_1(s+x)\overline{\Phi}_{1_x1}(x,t-s)dx+\overline{F}_1(t)+\\ +(1-p)\int_0^t f_1(s)ds\int_s^t f_2(q)\overline{\Phi}_{11}(t-q)dq+p\left[\overline{F}_2(t)-\overline{F}_1(t)\overline{F}_2(t)\right]\\ \overline{\Phi}_{1_x1}(t)=\int_0^x f_2(x-v)\overline{\Phi}_{1_v1}(v,t-x+v)dv+(1-p)\int_x^t f_2(y)\overline{\Phi}_{11}(t-y)dy+\\ +p\overline{F}_2(t)\end{cases} \tag{8}$$

Решая систему уравнений (8), окончательно имеем:

$$\overline{\Phi}_{1_x1}(x,t)=(1-p)\int_0^{t-x} f_2(x+y)\overline{\Phi}_{11}(t-x-y)dy+p\overline{F}_2(t)+$$
$$+(1-p)\int_0^x h_2(x-v)dv\int_0^{t-x} f_2(v+y)\overline{\Phi}_{11}(t-x-y)dy+ \tag{9}$$
$$+p\int_0^x \overline{F}_2(t-x+v)h_2^{*n}(x-v)dv.$$

Таким образом, определена функция распределения времени, затрачиваемого вторым устройством на сбор информации с учетом его блокировок первым устройством и возможным повторным сбором данных. Для решения задачи использован аппарат полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний. Полученные результаты могут быть применены для анализа и проектирования интерактивных ИС, когда при обработке запроса пользователя возможны блокировки устройства сбора данных (или поиска данных в базе) в связи, например, с некорректным запросом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копп В.Я. Моделирование переналаживаемых автоматизированных производственных систем/ В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский, О.П. Чуб. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 232 с.
2.Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем/ В.С. Королюк, А.Ф. Турбин.– Киев: Наук. думка, 1982.-236с.