УДК 521.19

А.В. Вовк, В.А. Дикарев, А.И. Пресняков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ

Аннотация. Изучен процесс формирования компонент порошковой смеси в жидкой среде при воздействии на среду быстро изменяющихся во времени возмущений, локализованных в малых частях занимаемого ею объема. Установлены условия, при выполнении которых процесс формирования компонент смеси будет стабилизирован. Произведен вывод системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс формирования многокомпонентной смеси. Полученные уравнения определяют эволюцию любой компоненты смеси.

Ключевые слова: многокомпонентная смесь, вектор компонент смеси, фокусировка, стабилизация, функция распределения.

Постановка проблемы

Рассматривается процесс формирования многокомпонентной смеси, содержащейся в некотором объёме V. Предполагается, что исходная смесь представляет собой массив твёрдых частиц, содержащихся в жидкой среде. Её компонентами являются частицы, размеры которых лежат в произвольных границах. Формирование смеси производится при воздействии на неё возмущений, локализованных в малых частях занимаемого ею объёма.

Анализ литературы

Подробное описание рассмотренных в этой статье способов обработки исходного сырья приведено в [1-2]. В работах [3-4] детально исследован процесс формирования многокомпонентных смесей. Свойства случайных возмущений и их вклад в эволюцию процесса подробно рассмотрены в работах [5-6].

В работе [7] была исследована задача о расщеплении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр на системы меньших порядков. Этот подход позволяет выписать дифференциальные уравнения для каждой из полученных систем с точностью до любой степени малого параметра.

Цели статьи

Разработка способов стабилизации процессов формирования многокомпонентных смесей. Вывод условий, при которых стабилизация будет возможна. Вывод и исследование системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс формирования многокомпонентной смеси. Решение задачи о расщеплении полученной системы дифференциальных уравнений с малым параметром на системы меньших порядков.

Стабилизация процесса формирования многокомпонентной смеси

Формирование многокомпонентных смесей [1-4] производится с целью получения её компонент с заданными характеристиками. Если обработка исходной смеси производилась с помощью возмущений, тождественных по своим характеристикам, и возмущения были равномерно распределены во времени и в занимаемой ею объёме V, то полученная в результате смесь будет однородной в V.

Одной из характеристик многокомпонентной смеси является вектор распределения компонент $\vec{\mathbf{k}}(M)$. Он имеет вид

$$\vec{\mathbf{k}}(M) = (K_1(M), \ldots, K_n(M)).$$

Здесь каждая координата $K_i(M)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть отношение $m_i(M)/m(M)$ массы m_i i-компоненты из малого объёма $\Delta V(M)$, содержащего точку M, к сумме масс $m_1 + \ldots + m_n = m(M)$ всех компонент, содержащихся в объёме $\Delta V(M)$, который выбираем настолько малым, что массы компонент в нём распределены равномерно (с точностью до величин, большего порядка малости, чем $m_1(M), \ldots, m_n(M)$).

Пусть $\Pi(t)$ − процесс изменения компонент многокомпонентной смеси под действием быстро изменяющимся во времени возмущениям.

В (5-6) была решена задача о стабилизации распределения неоднородного марковского процесса $\Pi(t)$ при возмущениях отдельных частей его фазового пространства − фрагментов. При многократных возмущениях фрагментов и выполнении некоторых условий, которым должны удовлетворять возмущения, процесс будет стабилизирован. Т. е. через некоторое время, в течение которого действуют возмущения, текущее распределение процесса будет либо локализовано в малой окрестности предельного распределения (σ-фокусировка), либо будет совпадать с ним (фокусировка).

Считаем, что множество всех возмущений $(\delta\Pi)_i$ процесса Π на $[s_0, t_0]$ конечно. Через $[t_i, \tau_i]$, Π_i, V_i обозначим промежутки времени, на которых действуют $(\delta\Pi)_i$, процессы, которые $(\delta\Pi)$ порождают, и их фазовые пространства. Предполагается, что: все V_i являются областями, а τ_i – точками фокусировки процессов Π_i на V_i; $(\delta\Pi)_i$, $(i = 1, 2, ...)$ предполагаются независимыми. Через $I(V_i)$ будем обозначать индикаторные функции множеств V_i. Пусть $V_i \bigcap V_j = V_{ij}$. Считаем, что на $V(V_i)$ задана функция распределения $\vec{\mathbf{k}}(M,t)$ процесса $\Pi(\Pi_i)$, если для любого события B из $V(V_i)$ и $t \in [s_0, t_0]$

$$P(M \in B) = \int_B \vec{\mathbf{k}}(N,t)dV_N .$$

Пусть $\vec{\mathbf{k}}(M,\beta_i)I(V_i)$, $\vec{\mathbf{k}}(M,\tau_i)I(V_i)$ – функции распределения на V_i в моменты времени β_i, τ_i. Тогда, чтобы получить функцию распределения процесса Π на V момент τ_i, следует переопределить её на V_i, заменив $\vec{\mathbf{k}}(M,\beta_i)I(V_i)$ на $\vec{\mathbf{k}}(M,\tau_i)I(V_i)$. Для $M \in V \setminus V_i$, $\vec{\mathbf{k}}(M,\beta_i) = \vec{\mathbf{k}}(M,\tau_i)$.

Усреднения функций $\vec{\mathbf{k}}(M,\beta_i)$, $\vec{\mathbf{k}}(M,\tau_i)$ по V_i совпадают:

$$\int_{V_i} \vec{\mathbf{k}}(M,\beta_i)dV_M = \int_{V_i} \vec{\mathbf{k}}(M,\tau_i)dV_M .$$

Это следует из условия нормировки $\int_V \vec{\mathbf{k}}(M,t)dV_M = 1$, которое выполняется при всех $t \in [s_0, \infty]$ и равенства

$$\vec{\mathbf{k}}(M,\beta_i)I(V \setminus V_i) = \vec{\mathbf{k}}(M,\tau_i)I(V \setminus V_i).$$

Это равенство имеет место, поскольку на (β_i, τ_i) все возмущения, кроме $(\delta\Pi)_i$, сосредоточены лишь на $V \setminus V_i$, а $(\delta\Pi)_i$ действуют на V_i.

Сформулируем условия стабилизации.

 ISSN 1562-9945

Условие А. Фокусирующие свойства каждого возмущения зависят лишь от положения его фазового пространства V_i. Точнее, пусть $V_i = V_j$ и распределения процессов $\Pi_i = \Pi_j$, в моменты β_i, β_j удовлетворяют условию

$$\int_V \vec{k}(M,\beta_i)dV_M = \int_V \vec{k}(M,\beta_j)dV_M \,.$$

Тогда распределения $f(M,\tau_i)I(V_i)$, $f(M,\tau_j)I(Vj)$ этих процессов в моменты τ_i, τ_j тождественно совпадают на V_i.

Условие Б. Пусть $(\delta\Pi)_i$, $(\delta\Pi)_j$ – возмущения, удовлетворяющие тем же условиям, что и в *условии А.* $P\,P(V_{ij}) > 0$, $f(M,\tau_i)I(V_i)$, $f(M,\tau_j)I(Vj)$ – распределения на V_i, V_j, возникающие в результате этих возмущений: на τ_i, β_i никакие возмущения $V_{i\,j}$, кроме $(\delta\Pi)_i$, не действуют. В этом случае считаем, что выполняются **условия согласования**: на $V_{i\,j}$ функции совпадают с точностью до постоянного множителя.

Пусть $V_i \subset V_j$. Из *условий А, Б* и (1) следует, что для любых $(\delta\Pi)_i$, $(\delta\Pi)_j$ распределения $f(M,\tau_i)I(V_i)$, $f(M,\tau_j)I(Vj)$ на V_i совпадают. Здесь предполагается, что в промежутке (τ_i, τ_j) никакие возмущения на V_i не действуют.

Условие В. Любая точка $M \in V$ вероятностью 1 содержится в бесконечном множестве областей V_i: до любого момента $t(t < \infty)$ происходит лишь конечное число возмущений. Для любого V_i найдется хотя бы одна V_j, $i < j$ не совпадающая с V_i, для которой $P(V_{ij}) \geq p > 0$. Здесь p не зависит от i, j.

Если все перечисленные условия выполняются, то при бесконечном числе возмущений всех V_i объёмов фокусировка на V будет иметь место. Если же число возмущений всех V_i будет достаточно большим, то распределения на всех V_i будут лишь незначительно отличаться от их предельных значений.

Вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей процесс формирования многокомпонентных смесей.

Предполагаем что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i = V$, $V_i \bigcap V_j \neq \varnothing$, при $i \neq j$.

Возмущениям подвергаются все объемы V_i, характеристики возмущений которых (степень их воздействия на смесь) в разных V_i неодинаковы. В каждом V_i эти характеристика являются функциями точки $M \in V_i$. Указанные различия обусловлены стремлением сформировать в каждом V_i смесь, распределение компонент, которое по своим свойствам отличалось бы от смесей в $V_j \neq V_i$.

Процесс обработки смеси в каждом V_i производиться следующим образом. Объем V_i разбивается на N_i объемов

$$V_{i,1}, V_{i,2}, \ldots, V_{i,n}, \tag{2}$$

в каждом из них искомая функция $U(\mu,t)$, описывающая процесс формирования компонент, заменяется ее усреднением. Таким образом, каждому объему V_α $(1 \leq r \leq N_i)$ из (2) ставиться в соответствие усреднение $y_\alpha(t)$ функции $U(\mu,t)$ по V_r. При этом параметр t предполагается фиксированным. Считаем, что величины объемов из (2) приблизительно одинаковы. Смесь, содержащаяся в них, подвергается возмущениям в разные моменты времени.

Точность аппроксимации функции $U(\mu,t)$ ее средними значениями по объемам (2) возрастает с ростом N_i.

Ранее было отмечено, что при реализации возмущений в объёмах V_i $(i = 1,\ldots,N)$, основная масса смеси остается в каждом из них. Для объемов из (2) это утверждение неверно, поскольку их величины малы. При возмущении каждого V_α часть смеси, содержавшейся в нем, перемещается в соседние с V_α объемы, при этом усреднения $y_\alpha(t)$ будут изменяться.

Найдем дифференциальные уравнения, описывающие процесс формирования смеси в объеме V_i $(i = 1,\ldots,N)$.

Пусть

$$\vec{\mathbf{Y}}_i(t) = (y_{i,1}, \ldots, y_{i,N_i}(t)) \tag{3}$$

 ISSN 1562-9945

вектор, компонентами которого являются усреднения функции $U(\mu,t)$ по каждому объему из (2).

Вычислим производные от компонент вектора $\vec{\mathbf{Y}}_i(t)$. При этом считаем, что возмущения, которым подвергается смесь в каждом объеме V_α $(1 \le r \le N_i)$ из (2) приводят к перемешиванию смеси в V_i. Таким образом, усреднение $y_\alpha(t)$ по любому V_α из (2) является функцией усереднений $(y_{i,1},...,y_{i,N_i}(t))$. Поэтому

$$\frac{dy_\alpha(t)}{dt} = \frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n_i} \frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial y_\beta(t)} \times \frac{dy_\beta(t)}{dt}.$$

Таким образом, вектор $\vec{\mathbf{Y}}_i(t)$ из (3) является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{\mathbf{Y}}_i(t)}{dt} = \frac{\partial \vec{\mathbf{Y}}_i(t)}{\partial t} \times \mathbf{A}_i(t)\vec{\mathbf{Y}}_i(t) + O(\varepsilon), \tag{4}$$

где матрица $\mathbf{A}_i(t)$ порядка $N_i \times N_i$ имеет вид

$$\mathbf{A}_i(t) = \left\| \frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial y_\beta(t)} \right\|; \ \alpha \ne \beta, \ \alpha,\beta = 1,\ldots,N_i. \tag{5}$$

Слагаемое $O(\varepsilon)$ учитывает массу смеси, просачивающуюся за объём V_i.

Объединяя уравнения (4) по всем V_i $(i = 1,\ldots,N)$, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую процесс формирования смеси в объеме $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Используя подход, рассмотренный в [7], мы можем привести матрицу системы к блочно-диагональному виду:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Размерности блоков в матрице (6) (размерности матриц, которые в них находятся) равны $N_1 \times N_1, \ldots, N_i \times N_i, \ldots, N_n \times N_n$ соответственно. Матрица, стоящая в i-ом блоке имеет вид

$$\left\| \frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial y_\beta(t)} \right\|; \ \alpha,\beta = 1,\ldots,N_i. \tag{7}$$

Элементы матрицы $\mathbf{A}$, не принадлежащие этим блокам, равны нулю. Диагональные элементы не совпадают: если возмущение объема V_i превосходит возмущение V_j, то диагональные элементы матрицы (7) для V_i будут больше, чем ее элементы для V_j.

Отсюда, с учетом неравенств $\frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial y_\beta(t)} << \frac{\partial y_\alpha(t)}{\partial y_\beta(t)}$, в которых частные производные выписаны для V_i и V_j, получаем, что собственные значения матриц $\mathbf{A}_i$, находящихся в разных блоках, не совпадают.

Упрощение исследуемой системы

Рассмотрим задачу о расщеплении полученной выше системы дифференциальных уравнений на подсистемы меньших порядков.

Исследуемая система имеет вид

$$\varepsilon^h \mathbf{Y}' = \mathbf{A}(t,\varepsilon)\mathbf{Y}. \tag{10}$$

Здесь Y – невырожденная $(n \times n)$-матрица, её столбцами являются решения системы (10), $h > 0$ – целое число. Матрица $\mathbf{A}(t,\varepsilon)$ имеет асимптотическое разложение

$$\mathbf{A}(t,\varepsilon) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{A}_r(t)\varepsilon^r, \ \varepsilon << 1. \tag{11}$$

Все исследуемые далее функции и матрицы предполагаются голоморфными по переменной t.

Пусть $\mathbf{Y} = \mathbf{T}(t)\mathbf{Y}^*$, тогда

$$\tilde{\mathbf{A}}(t,\varepsilon) = \mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{A}(t,\varepsilon)\mathbf{T}(t) - \varepsilon^h \mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{T}'(t). \tag{12}$$

Если собственные значения λ_i ($i = 1,\dots,n$) матрицы $\mathbf{A}_0(0)$ можно разбить на три группы $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, $\lambda_{k+1},\dots,\lambda_{k+l}$, $\lambda_{k+l+1},\dots,\lambda_n$ так, чтобы собственные значения из разных групп не совпадали, то существует трёхдиагональная матрица

$$\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_{12}(t) & 0 \\ \mathbf{T}_{21}(t) & \mathbf{I} & \mathbf{T}_{23}(t) \\ 0 & \mathbf{T}_{32}(t) & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

с помощью которой матрицу

$$\mathbf{A}_0(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0^{11}(t) & \mathbf{A}_0^{12}(t) & \mathbf{A}_0^{13}(t) \\ \mathbf{A}_0^{21}(t) & \mathbf{A}_0^{22}(t) & \mathbf{A}_0^{23}(t) \\ \mathbf{A}_0^{31}(t) & \mathbf{A}_0^{32}(t) & \mathbf{A}_0^{33}(t) \end{pmatrix}$$

можно привести к блочно-диагональному виду

$$\tilde{\mathbf{A}}_0(t)=\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{A}}_0^{11}(t) & 0 & 0\\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_0^{22}(t) & 0\\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_0^{33}(t)\end{pmatrix}.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{A}}_0^{11}(t)$, $\tilde{\mathbf{A}}_0^{22}(t)$, $\tilde{\mathbf{A}}_0^{33}(t)$ – квадратные матрицы порядков k, l, m; собственные значения матриц $\tilde{\mathbf{A}}_0^{11}(0)$, $\tilde{\mathbf{A}}_0^{22}(0)$, $\tilde{\mathbf{A}}_0^{33}(0)$ не совпадают в некоторой окрестности нуля.

Элементы матрицы $\mathbf{T}(t)$ можем найти, решая систему линейных алгебраических уравнений.

Обозначим $\mathbf{Y}=\mathbf{P}(t,\varepsilon)\mathbf{Z}$, при условии, что $\det\mathbf{P}_0(t)\neq 0$.

Уравнение (10) относительно новой неизвестной можно записать так

$$\varepsilon^h\mathbf{P}'(t,\varepsilon)\mathbf{Z}+\varepsilon^h\mathbf{P}(t,\varepsilon)\mathbf{Z}'=\tilde{\mathbf{A}}(t,\varepsilon)\mathbf{P}(t,\varepsilon)\mathbf{Z},$$

где $\mathbf{B}(t,\varepsilon)=\mathbf{P}^{-1}(t,\varepsilon)\tilde{\mathbf{A}}(t,\varepsilon)\mathbf{P}(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\mathbf{P}^{-1}(t,\varepsilon)\mathbf{P}'(t,\varepsilon)$.

Таким образом, система (10) преобразована к виду:

$$\varepsilon^h\mathbf{Z}'=\mathbf{B}(t,\varepsilon)\mathbf{Z}. \quad (13)$$

Из (13) получим

$$\varepsilon^h\mathbf{P}'(t,\varepsilon)=\tilde{\mathbf{A}}(t,\varepsilon)\mathbf{P}(t,\varepsilon)-\mathbf{P}(t,\varepsilon)\mathbf{B}(t,\varepsilon). \quad (14)$$

Матрицы функций $\mathbf{P}(t,\varepsilon)$ и $\mathbf{B}(t,\varepsilon)$ в (14) представим в виде

$$\mathbf{P}(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{P}_r(t)\varepsilon^r,\ \mathbf{B}(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{B}_r(t)\varepsilon^r. \quad (15)$$

Подставим ряды из (15) и (11) в (14) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях ε. Уравнение (14) имеет место при выполнении следующих условий:

$$\tilde{\mathbf{A}}_0(t)\mathbf{P}_0(t)-\mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_0(t)=0, \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_0(t)\mathbf{P}_r(t)-\mathbf{P}_r(t)\mathbf{B}_0(t)=\sum_{s=0}^{r-1}\left[\mathbf{P}_s(t)\mathbf{B}_{r-s}(t)-\tilde{\mathbf{A}}_{r-s}(t)\mathbf{P}_s(t)\right]+\mathbf{P}'_{r-h}(t). \quad (17)$$

В (17) $r>0$; последний член при $r<h$ опускаем.

Считаем, что $\mathbf{B}_0(t)=\tilde{\mathbf{A}}_0(t)$, $\mathbf{P}_0(t)=\mathbf{I}$. Тогда (16) примет вид

$$\tilde{\mathbf{A}}_0(t)\mathbf{P}_r(t)-\mathbf{P}_r(t)\tilde{\mathbf{A}}_0(t)=\mathbf{B}_r(t)-\mathbf{H}_r(t),\ r>0. \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{H}_r(t)$ зависит только от $\mathbf{P}_j(t)$, $\mathbf{B}_j(t)$ и $\mathbf{P}'_j(t)$ с номерами $j<r$. Уравнения (18) можно последовательно разрешить при помощи матриц $\mathbf{P}_r(t)$, $\mathbf{B}_r(t)$, которые имеют вид

$$\mathbf{P}_r(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P}_r^{12}(t) & 0 \\ \mathbf{P}_r^{21}(t) & 0 & \mathbf{P}_r^{23}(t) \\ 0 & \mathbf{P}_r^{32}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_r(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_r^{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_r^{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_r^{33}(t) \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Установлено, что замена $\mathbf{Y} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{P}_r(t)\varepsilon^r \right) \mathbf{Z}$ переводит уравнение (10) в дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h \mathbf{Z}' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{B}_r(t)\varepsilon^r \right) \mathbf{Z}.$$

Матрицы $\mathbf{B}_r(t)$ этой системы имеет блочно-диагональный вид (20). Таким образом, исходная система, состоящая из n уравнений, может быть расщеплена на три подсистемы меньших порядков.

Расщепление на n подсистем производится аналогично.

Выводы

Научная новизна состоит в следующем. Установлены условия стабилизации процессов формирования многокомпонентных смесей. Произведён вывод системы дифференциальных уравнений, описывающий процесс формирования исследуемой смеси. Проведено исследование этой системы. Установлено, что её можно расщепить на системы меньших порядков.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученные результаты позволяют производить общий анализ процессов, происходящих в многокомпонентных смесях. Это даёт возможность предсказать эволюцию таких процессов при условии, что их основные характеристики известны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белянин П. Н. Применение порошковых материалов. Состояние и перспективы / П. Н. Белянин // Проблемы машиностроения и надежность машин. – 1996. – №2. – С. 3–16.

2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы / Коллинз Р. – М.: Мир, 1964. – 350 с.

3. Фигуровский Н. А. Седиментометрический анализ / Фигуровский Н. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1982. – 332 с.

4. Грановский М. Г. Электрообработка жидкостей / Грановский М. Г., Лавров И. С., Смирнов О. В. – Ленинград: Химия, 1976. – 216 с.

5. Дикарев В. А. Стабилизация распределений марковского процесса при возмущениях континуальных компонент / В. А. Дикарев // Доклады НАН Украины. – 2003. – №6. – С. 47–53.

6. Дикарев В. А. Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов / В. А. Дикарев, С. Н. Герасин, Н. И. Слипченко // Доклады НАН Украины. – 2000. – №8. – С. 90–93.

7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Вазов В. – М.: Мир, 1968. – 464 с.