УДК 519.6

І.О. Астіоненко, Н.О. Козуб, О.І. Литвиненко, А.Н. Хомченко

ПОБУДОВА ПОЛІНОМІАЛЬНОГО БАЗИСУ ДИСКРЕТНОГО ЕЛЕМЕНТА PR-21

В роботі сконструйовано поліноміальний базис просторового елемента PR-21. Модель має розподіл рівномірної масової сили наближений до розподілу, що отриманий на основі розрахунку кінетичної енергії обертання твердого тіла.

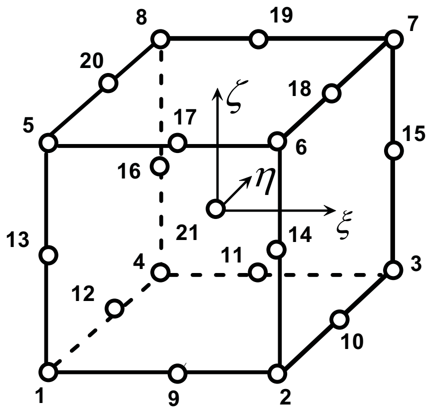
Ключові слова: скінченний елемент, інтерполяція, модифікований базис.

Постановка проблеми. Побудова оптимальних схем повузлової дискретизації є складною проблемою. Успіх дискретного моделювання залежить від конфігурації шаблону, числа вузлів дискретизації та їх розташування. Цими питаннями переймаються фахівці з методу скінченних різниць (МСР), методу скінченних елементів (МСЕ). Наприклад, в МСЕ використовують повузловий розподіл рівномірної масової сили, який обчислюють за допомогою інтеграла по області скінченного елемента [1]. Повузловий розподіл можна отримати, наприклад, за допомогою монте-карловських експериментів. Відомо, що вузлові навантаження можна використовувати у чисельному інтегруванні в якості вагових коефіцієнтів (наприклад, квадратура Гаусса-Лобатто) [2].

Аналіз останніх досліджень. У статті [2] розглядається куб ($2\times2\times2$) з 21 вузлом інтерполяції (8 вузлів у вершинах, 12 на ребрах і 1 вузол у центрі куба). В англомовній літературі цей елемент позначають PR-21 (рис. 1). У [2] показано, як на основі розрахунку кінетичної енергії обертання мас можна знайти спектральний розподіл рівномірної масової сили для PR-21. Цьому розподілу притаманна наступна властивість: відношення спектральних характеристик центрального і кутового вузлів дорівнює квадрату числа вершин елемента. Доведено, що кращі схеми дискретизації задовольняють цій умові. В [3] показано, як цей розподіл отримати за допомогою “інтуїтивного” конструювання, використовуючи стрижневу аналогію. Треба зауважити, що в жодній з попередніх публікацій не наведено інтерполяційного базису PR-21.

Мета статті - сконструювати базисні функції поліноміальної інтерполяції на дискретному елементі PR-21. Побудувати модель PR-21 з розподілом рівномірної масової сили, що суттєво не відрізняється від розподілу [2,3], що отриманий при використанні кінетичної енергії обертання твердого тіла.

Основна частина. Для побудови базису PR-21 використаємо геометричне моделювання, матричний метод і метод оптимізації інтерполяційних якостей і обчислювальних властивостей базисів дискретних елементів.



$$|\xi| \le 1,\quad |\eta| \le 1,\quad |\zeta| \le 1.$$

Рис. 1. PR-21

Геометричний метод. Модель 1. Базисна функція для вузла 1 задається як суперпозиція площин (рис. 2а): 2-3-7-6; 3-4-8-7; 5-6-7-8; 9-11-19-17; 12-10-18-20; 13-14-15-16.

Отримуємо базисну функцію для вузла 1, як добуток площин:

$$N_1 = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\xi\eta\zeta\,. \tag{1}$$

Базисна функція для вузла 9 задається як суперпозиція площин (рис. 2б): 2-3-7-6; 3-4-8-7; 5-6-7-8; 1-4-8-5; 13-14-15-16.

Для вузла 9 отримаємо:

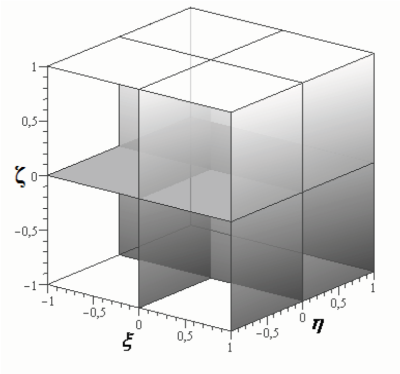
$$N_9 = -\frac{1}{4}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-\zeta)\zeta\,. \tag{2}$$

Базисна функція N_{21} задається як суперпозиція площин (рис. 2в): 2-3-7-6; 1-4-8-5; 4-3-7-8; 1-2-6-5; 5-6-7-8; 1-2-3-4.

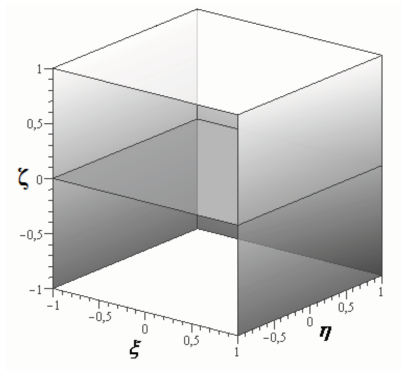
Для вузла 21 отримаємо:

$$N_{21} = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\left(1-\zeta^2\right). \tag{3}$$

Модель має 27 параметрів у інтерполяційному поліномі (як і у елемента лагранжевої сім'ї з 27 вузлами).



а) до побудови функції N_1



б) до побудови функції N_9

Рис. 2.

Алгебраїчний метод. Модель 2. Матричний підхід до побудови базису для PR-21 починається з вибору 21-параметричного полінома з трьома аргументами:

$$\begin{aligned}\phi = {} & \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\xi\zeta + \alpha_7\eta\zeta + \alpha_8\xi^2 + \alpha_9\eta^2 + \alpha_{10}\zeta^2 + \\ & + \alpha_{11}\xi^2\eta + \alpha_{12}\xi\eta^2 + \alpha_{13}\eta^2\zeta + \alpha_{14}\eta\zeta^2 + \alpha_{15}\xi^2\zeta + \alpha_{16}\xi\zeta^2 + \alpha_{17}\xi\eta\zeta + \\ & + \alpha_{18}\xi^2\eta\zeta + \alpha_{19}\xi\eta^2\zeta + \alpha_{20}\xi\eta\zeta^2 + \alpha_{21}\xi^2\eta^2\zeta^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Базис елемента складається із 21 полінома, які підпорядковані інтерполяційній гіпотезі:

$$N_i\left(\xi_k, \eta_k, \zeta_k\right) = \delta_{ik}, \tag{5}$$

де i – номер полінома; k – номер вузла; δ_{ik} – символ Кронекера; $i,k = \overline{1,21}$.

Розв’язавши СЛАР (21×21), знайдемо невідомі параметри α_i і запишемо інтерполяційний поліном (4) у вигляді:

$$\phi = \left[N_i\right]\left\{\varPhi_i\right\}, \tag{6}$$

де $\left[N_i\right]$ - матриця-рядок базисних функцій СЕ ($i = \overline{1,21}$);

$\left\{\Phi_i\right\}$ - вектор значень функції, що інтерполюється.

Отримуємо базисні функції для PR-21:

$$\begin{aligned}N_1 = {} & \frac{1}{8}(\xi + \eta + \zeta - \xi^2\eta - \xi\eta^2 - \eta^2\zeta - \eta\zeta^2 - \xi^2\xi - \xi\zeta^2 - \xi\eta\zeta + \\ & + \xi^2\eta\zeta + \xi\eta^2\zeta + \xi\eta\zeta^2 + \xi^2\eta^2\zeta^2);\end{aligned} \tag{7}$$

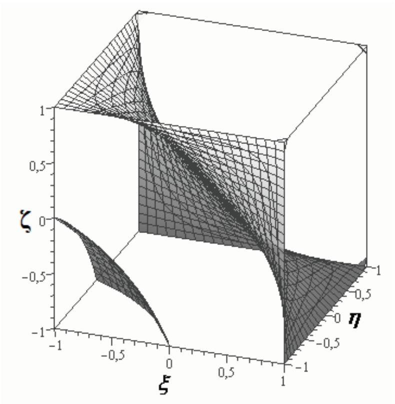
$$N_9 = \frac{1}{4}(-\eta - \zeta + \eta\zeta - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2 + \xi^2\eta + \xi^2\zeta - \xi^2\eta\zeta - \frac{1}{2}\xi^2\eta^2\zeta^2); \tag{8}$$

$$N_{21} = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2\zeta^2. \tag{9}$$

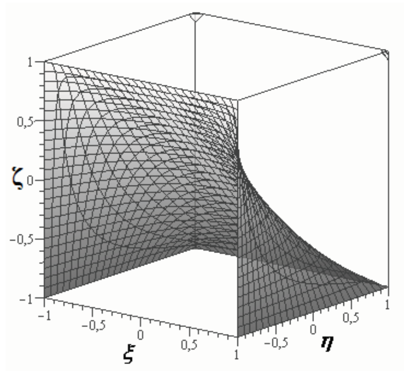
При цьому має зберігатися ваговий баланс:

$$\sum_{i=1}^{21} N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right)=1. \tag{10}$$

Поверхні нульового рівня цих функцій показано на рис. 3.



а) до побудови функції N_1



б) до побудови функції N_9

Рис. 3.

Розглянемо питання про розподіл рівномірної масової сили на просторових скінченних елементах. Для ССЕ ***вузлова доля рівномірної масової сили*** визначається потрійним інтегралом по об'єму Ω скінченного елемента від відповідної базисної функції, зваженої з об'ємною щільністю γ:

$$p_i = \iiint_{\Omega} \gamma N_i\left(\xi,\eta,\zeta\right) d\xi d\eta d\zeta\ ,\ \gamma = \frac{1}{8}. \tag{11}$$

В статті [3] показано, як за допомогою використання кінетичної енергії обертання мас можна знайти спектральний розподіл рівномірної масової сили, який будемо називати фізичним (табл. 1).

Таблиця 1.

Розподіл рівномірної масової сили на дискретному елементі

Фізичний розподіл M_i	Модель 1	Модель 2
$M_1=\frac{1}{120}=0,008(3)$	$p_1=\frac{1}{216}=0,004(629)$	$p_1=\frac{1}{216}=0,004(629)$
$M_9=\frac{4}{120}=0,0(3)$	$p_9=\frac{12}{216}=0,0(5)$	$p_9=\frac{8}{216}=0,(037)$
$M_{21}=\frac{64}{120}=0.5(3)$	$p_{21}=\frac{64}{216}=0,(296)$	$p_{21}=\frac{112}{216}=0,(518)$

Аналіз результатів (табл.1) свідчить про деякі відхилення отриманих значень від фізичного спектру.

Метод оптимізації інтерполяційних якостей і обчислювальних властивостей базисів дискретних елементів. *Модель 3.* Побудуємо третю модель, у якої розподіл рівномірної масової сили буде максимально наближений до теоретичного розподілу. Для цього сформулюємо і розв'яжемо для PR-21 ***обернену задачу:*** побудувати базисні функції за заздалегідь визначеним спектром [4].

У формулу зваженого усереднення

$$N_i^{(3)} = (1-\alpha)N_i^{(1)} + \alpha N_i^{(2)}, \qquad \textbf{(12)}$$

підставляємо значення коефіцієнта $\alpha = \dfrac{16}{15}$, яке знаходимо з рівняння:

$$M_i = \alpha\, p_i^{(1)} + \left(1-\alpha\right) p_i^{(2)}, \qquad \textbf{(13)}$$

де $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}$ – значення спектру навантажень, яке обчислюється за формулою (11) для моделей 1 і 2 (табл. 1);

M_i – значення фізичного спектру навантажень (табл. 1).

Отримаємо наступні базисні функції моделі 3 за формулою (12):

$$\begin{aligned} N_1 = \frac{1}{120}(16(\xi+\eta+\zeta) - 16(\xi^2\eta + \xi\eta^2 + \eta^2\zeta + \eta\zeta^2 + \xi^2\zeta + \xi\zeta^2) - 15\xi\eta\zeta + \\ +15(\xi^2\eta\zeta + \xi\eta^2\zeta + \xi\eta\zeta^2) + \xi^2\eta^2\zeta + \xi\eta^2\zeta^2 + \xi^2\eta\zeta^2 + 15\xi^2\eta^2\zeta^2); \end{aligned} \qquad \textbf{(14)}$$

$$\begin{aligned} N_9 = \frac{1}{60}(-16\eta - 15\zeta + 15\eta\zeta - 8\xi^2 + 8\eta^2 + 7\zeta^2 + 16\xi^2\eta + \eta\zeta^2 + \\ +15\xi^2\zeta - 15\xi^2\eta\zeta + \xi^2\zeta^2 - \xi^2\eta\zeta^2 - 8\xi^2\eta^2\zeta^2); \end{aligned} \qquad \textbf{(15)}$$

$$N_{21} = \frac{1}{15}(15 - 7\xi^2 - 7\eta^2 - 7\zeta^2 - \xi^2\eta^2 - \xi^2\zeta^2 - \eta^2\zeta^2 + 9\xi^2\eta^2\zeta^2). \qquad \textbf{(16)}$$

Розподіл рівномірної масової сили для моделі 3 наступний:

$$p_1 = \frac{15}{3240} = 0,004(629); \qquad p_9 = \frac{116}{3240} \approx 0,0358; \qquad p_{21} = \frac{1728}{3240} \approx 0,5302.$$

Цікаво, що базисні функції всіх трьох моделей на границі ведуть себе однаково. Наприклад, на ребрі 1-2:

$$N_1\left(\xi,-1,-1\right) = \frac{1}{2}\xi\left(\xi-1\right), \quad N_9\left(\xi,-1,-1\right) = 1-\xi^2, \qquad N_{21}\left(\xi,-1,-1\right) = 0.$$

Висновки. В роботі вперше побудовано поліноміальний базис на елементі PR-21. Тестування базису виконано на прикладі задачі про розподіл навантаження від одиничної маси по вузлах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.

2. Overmeire M.V. A Diagonal Mass Matrix with Full Convergence Rate for Finite Element Dynamical Problems / M.V. Overmeire //Trans. Can. Soc. Mech. Eng. — V.7, № 2. —1983. — С. 100-102.

3. Крючковский В.В. Приемы оптимизации вычислительных свойств дискретных моделей /В.В. Крючковский, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского гос. техн. университета. — Спец. выпуск. — Херсон: ХГТУ, 1999. — С. 92-93.

4. Астионенко И.А. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций /И.А.Астионенко, Е.И Литвиненко, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского нац. техн. университета. — Вып. 2(35). — Херсон: ХНТУ, 2009. — С. 36-42.

ISSN 1562-9945