

УДК 681.3.06: 518.12

В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ФОРМЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Аннотация. В работе предлагается усовершенствование известных и создание новых математических моделей процессов управления и контроля параметров сложных нелинейных многорежимных объектов. Путем линеаризации в окрестностях рабочей точки получена линейная математическая модель пространства состояний, являющаяся моделью приближенной динамики в отклонениях. Математическая модель процесса управления и контроля параметров исследуемого объекта создается как модель динамических отклонений от перемещающейся рабочей точки на его статической характеристике и является следящей системой с астатизмом первого порядка относительно семейства статических характеристик.

Ключевые слова: математическая модель пространства состояний, статическая характеристика, модель процесса управления и контроля параметров, следящая система, ряд Тейлора, матрица Якоби.

Введение

Объекты энергетики (ОЭ) представляют собой существенно нелинейные динамические многорежимные объекты управления и характеризуются сложной взаимосвязью управляющих и возмущающих воздействий, координат состояния и выходных контролируемых параметров. Такая взаимосвязь находит свое отражение в соответствующих математических моделях (ММ). В процессе функционирования ОЭ можно выделить ряд установившихся режимов, для которых взаимосвязь управляющих воздействий и координат состояния характеризуется многомерной нелинейной зависимостью – статической характеристикой (СХ). Переменные, по которым регулируются современные ОЭ, являются косвенно измеряемыми и их оценка невозможна без применения математических моделей в электронных системах управления (ЭСУ) рассматриваемыми объектами.

© Миргород В.Ф., Гвоздева И.М., 2011

Основная часть

При исследовании ОЭ можно выделить одну или несколько скалярных переменных, относительно которых осуществляется регулирование и строятся СХ. Например, такими переменными могут быть: расход топлива, обороты турбин или другой параметр. Зависимости координат состояния от режимной переменной должны найти отражение в соответствующих формах ММ процессов управления.

Совершенствование ОЭ сопровождалось одновременным совершенствованием применяемых ММ от простейших одномерных в виде передаточных функций до современных многомерных кусочно-линейных динамических моделей пространства состояний [1,2,3]. Тем не менее, ввиду усложнения процессов управления проблеме усовершенствования известных и создания новых ММ уделяется постоянное внимание. Такими новыми моделями являются Марковские ММ [4] и модели неопределенных собственных значений [5]. Одним из перспективных направлений научных исследований является установление эквивалентных форм ММ и методов их аппроксимационных преобразований, т.к. различные эквивалентные формы ММ отличаются возможностями численной реализации [6].

Целью данной работы является усовершенствование известных и создание новых математических моделей процессов управления и контроля параметров сложных нелинейных многорежимных объектов.

Первым этапом получения ММ процессов управления ОЭ является линеаризация в окрестностях k -ой рабочей точки нелинейной модели пространства состояний [4] в виде векторно-матричных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \bar{f}_1(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), \\ \bar{y} &= \bar{f}_2(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где \bar{x} – вектор состояния, \bar{u} – вектор управления, \bar{v} – вектор внешних воздействий, \bar{y} – вектор наблюдения, \bar{f}_1 и \bar{f}_2 – нелинейные вещественные векторные функции.

Выбранная рабочая точка соответствует некоторому установившемуся режиму

$$\vec{f}_1(\vec{x}_k, \vec{u}_k, \vec{v}_k) = 0. \quad (2)$$

Линеаризация заключается в разложении правых частей (1) в ряд Тейлора с удержанием линейных членов разложения

$$\vec{f}_1(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) \approx \vec{f}_1(\vec{x}_k, \vec{u}_k, \vec{v}_k) + J_{1xk}(\vec{x} - \vec{x}_k) + J_{1uk}(\vec{u} - \vec{u}_k) + J_{1vk}(\vec{v} - \vec{v}_k), \quad (3)$$

$$\vec{f}_2(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}) \approx \vec{f}_2(\vec{x}_k, \vec{u}_k, \vec{v}_k) + J_{2xk}(\vec{x} - \vec{x}_k) + J_{2uk}(\vec{u} - \vec{u}_k) + J_{2vk}(\vec{v} - \vec{v}_k),$$

где $J_{1xk}, J_{1uk}, J_{1vk}, J_{2xk}, J_{2uk}, J_{2vk}$ – матрицы градиентов (матрицы Якоби) в выбранной k -ой рабочей точке.

Так как временной масштаб изменения внешних условий несоизмерим с временным масштабом процессов управления, то полагается [4], что выполняется условие $\vec{v} - \vec{v}_k = 0$. Поэтому из условий (2) и (3) следует линейная математическая модель пространства состояний (ММПС)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}_m}{dt} &= A_k \vec{x}_m + B_k \vec{u}_m, \\ \vec{y}_m &= C_k \vec{x}_m + D_k \vec{u}_m, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где A_k, B_k, C_k, D_k – матрицы Якоби в выбранной рабочей точке, зависящие от $\vec{x}_k, \vec{u}_k, \vec{v}_k, \vec{x}_m = \vec{x} - \vec{x}_k, \vec{u}_m = \vec{u} - \vec{u}_k, \vec{y}_m = \vec{y} - \vec{y}_k$.

ММПС [4] является моделью приближенной динамики в отклонениях. Ее достоинства определяются универсальностью применения и удачной формой их представления, т.к. основные методы современной теории управления ориентированы именно на такую исходную форму моделей процессов управления и позволяют решать задачи оптимальной оценки состояния, идентификации, а также оптимального синтеза законов управления по различным критериям. Однако, указанная ММПС имеет ряд недостатков. Статическая точность ММПС определяется уравнением

$$A_k \vec{x}_{st} + B_k \vec{u}_{st} = 0, \quad (5)$$

откуда следует $\vec{x}_{st} = -A_k^{-1} B_k \vec{u}_{st} = S_k \vec{u}_{st}$.

Условие (5) удовлетворяется лишь в точках заранее заданных установившихся режимов. Статическая ошибка ММПС будет наибольшей в том случае, если установившийся режим возникает ранее в точке $\vec{u}_{st} = \vec{u}_k - \delta \vec{u}$. При этом ММПС обуславливает искусственный гистерезис СХ, что является крайне неблагоприятным фактором. Так как в ММПС вид СХ не учитывается в явной форме,

то результаты решения (5) могут не совпадать и на практике не совпадают с экспериментально полученными СХ.

Центральной гипотезой построения предлагаемых в настоящей работе моделей является динамическое слежение за СХ, т.е. ММ создается в виде модели динамических отклонений от перемещающейся рабочей точки на СХ. На рис. 1 приведена блок-схема такой модели, которая по своей структуре является следящей системой с астатизмом первого порядка относительно семейства СХ и далее в работе будет обозначаться как ММСС.

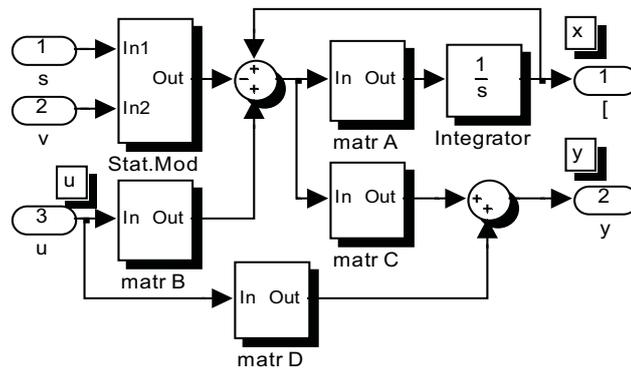


Рисунок 1 – Блок-схема ММСС

Допустим, что семейство СХ получено экспериментально в функции от режимной переменной:

$$\vec{x}_{st} = \vec{x}_{st}(s) = \varphi_1(s), \vec{y}_{st} = \vec{y}_{st}(s) = \varphi_2(s).$$

Уравнения объекта в параметризованном и приведенном к стандартным атмосферным условиям виде могут быть представлены следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{f}_1(\vec{x}, \vec{u}(s), s) \\ \vec{y} &= \vec{f}_2(\vec{x}, \vec{u}(s), s) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Будем полагать, что в окрестности исследуемого установившегося режима, соответствующего точке $s_k, \vec{x}_{st}(s_k), \vec{y}_{st}(s_k)$, на СХ отклонения $\Delta \vec{u}$ не имеют места. Выполним линеаризацию (6):

$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_1(\vec{x}, s) &\approx \vec{f}_1[\vec{x}_{st}(s_k), s_k] + J_{1xk} [\vec{x} - \vec{x}_{st}(s_k)] + \vec{j}_{1sk} (s - s_k), \\ \vec{f}_2(\vec{x}, s) &\approx \vec{f}_2[\vec{x}_{st}(s_k), s_k] + J_{2xk} [\vec{x} - \vec{x}_{st}(s_k)] + \vec{j}_{2sk} (s - s_k), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\vec{j}_{1sk}, \vec{j}_{2sk}$ – градиенты правых частей уравнений (6) по режимной переменной. Для установившегося режима $\vec{f}_1[\vec{x}_{st}(s_k), s_k] = 0$,

$\vec{f}_2[\vec{x}_{st}(s_k), s_k] = \vec{y}_{st}(s_k)$, поэтому из (6), (7) следует ММ пространства состояний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= J_{1x}[\vec{x} - \vec{x}_{st}(s_k)] + \vec{j}_{1s}(s - s_k) \\ \vec{y} &= \vec{y}_{st} + J_{2x}[\vec{x} - \vec{x}_{st}(s_k)] + \vec{j}_{2s}(s - s_k) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для существования стационарного режима требуется выполнение условия

$$\left. \frac{d\vec{f}}{ds} \Big|_{s_k} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial s} \Big|_{s_k} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{x}(s_k)} \cdot \frac{d\vec{x}_{st}(s)}{ds} \Big|_{s_k} = 0, \right\} \quad (9)$$

откуда следует соотношение: $\vec{j}_{sk} + J_{xk} \frac{d\vec{x}_{st}(s)}{ds} \Big|_{s_k} = 0$, позволяющее

представить (8) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= J_{1x}[\vec{x} - \vec{x}_{st}(s_k)] - \frac{d\vec{x}_{st}(s)}{ds} \Big|_{s_k} \cdot (s - s_k) \\ \vec{y} &= \vec{y}_{st}(s_k) + J_{2x}[\vec{x} - \vec{x}_{st}(s_k)] - \frac{d\vec{x}_{st}(s)}{ds} \Big|_{s_k} \cdot (s - s_k) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ММ в виде (10) является усовершенствованием известных моделей и имеет следующие достоинства:

- в явном виде учитывается вид СХ и их крутизна в рабочих точках;
- число идентифицируемых матриц сокращается наполовину;
- модель организована по принципу следящей системы и при изменении положения рабочей точки на СХ отслеживает такое изменение.

Следует заметить, что дополнительное слагаемое в скобках правой части (10) является линейным приближением реальной функции СХ в виде ряда Тейлора, поэтому при построении модели замена такого приближения истинным значением является естественным шагом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= J_{1x}[\vec{x} - \vec{x}_{st}(s)] \\ \vec{y} &= \vec{y}_{st} + J_{2x}[\vec{x} - \vec{x}_{st}(s)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При учете дополнительных управляющих воздействий ММСС типа (11) имеет вид, представленный блок-схемой на рис. 1. ММ (11) является параметризованной, линейной по координатам состояния и нелинейной по режимной переменной. При разложении в ряд Тейлора правой части (1)

$$\vec{f}_1(\vec{x}_k + \Delta\vec{x}, s_k + \Delta s) = \vec{f}_1(\vec{x}_k, s_k) + J_{x1}(\vec{x}_k, s_k)\Delta x + \left[\vec{j}_{s1}(\vec{x}_k, s_k)\Delta s + \frac{1}{2!}\vec{j}_{s2}(\vec{x}_k, s_k)\Delta s^2 + \frac{1}{3!}\vec{j}_{s3}(\vec{x}_k, s_k)\Delta s^3 + \dots \right] + R_1(\Delta\vec{x}) + R_2(\Delta\vec{x}, \Delta s)$$

и после вынесения матрицы градиентов за скобки, получаем представление

$$\vec{f}_1(\vec{x}_k + \Delta\vec{x}, s_k + \Delta s) = \vec{f}_1(\vec{x}_k, s_k) + J_{x1}(\vec{x}_k, s_k) \cdot [\Delta\vec{x} + J_{x1}^{-1}(\vec{x}_k, s_k)\vec{j}_{s1}(\vec{x}_k, s_k)\Delta s + \frac{1}{2!}J_{x1}^{-1}(\vec{x}_k, s_k)\vec{j}_{s2}(\vec{x}_k, s_k)\Delta s^2 + \frac{1}{3!}J_{x1}^{-1}(\vec{x}_k, s_k)\vec{j}_{s3}(\vec{x}_k, s_k)\Delta s^3 + \dots] + R_1(\Delta\vec{x}) + R_2(\Delta\vec{x}, \Delta s).$$

Анализируя последнее выражение, можно заметить, что при выполнении условий залегания разложение в ряд Тейлора приобретает следующий вид

$$\vec{f}_1(\vec{x}, s) = \vec{f}_1(\vec{x}_k, s_k) + J_{x1}(\vec{x}_k, s_k) \cdot \left[\Delta\vec{x} - \frac{d\vec{\varphi}}{ds} \Big|_k \Delta s - \frac{1}{2!} \frac{d^2\vec{\varphi}}{ds^2} \Big|_k \Delta s^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3\vec{\varphi}}{ds^3} \Big|_k \Delta s^3 + \dots \right] + R_1(\Delta\vec{x}) + R_2(\Delta\vec{x}, s) = \vec{f}_1(\vec{x}_k, s_k) + J_{x1}(\vec{x}_k, s_k)[\vec{x} - \vec{\varphi}(\vec{x}_k, s)] + R_1(\Delta\vec{x}) + R_2(\Delta\vec{x}, s),$$

поскольку выражение в квадратных скобках представляет собой разложение в ряд Тейлора функции СХ.

Пренебрегая остатками ряда, из последнего выражения получаем ММ в виде следящей системы, которая описывается уравнениями в параметрической форме относительно s .

Для оценки точности предлагаемых ММ выполнена их компьютерная реализация для силовой установки на базе трехвального газотурбинного двигателя в режиме “приемистость” в сопоставлении с реальными базами данных и проведена численная оценка точности моделей (рис. 2).

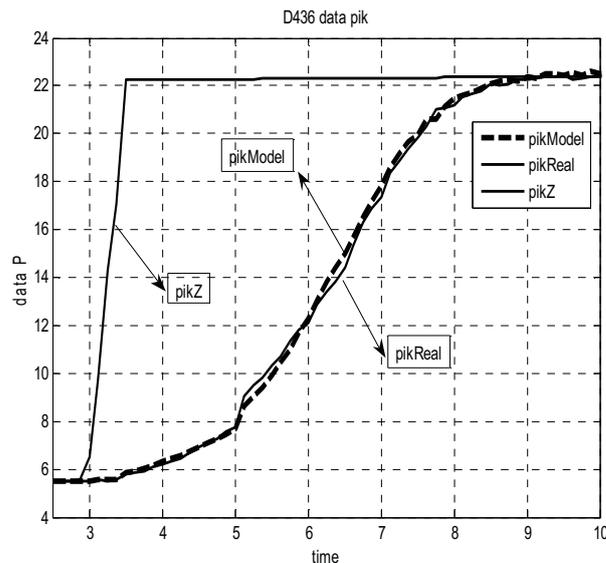


Рисунок 2 – Изменение параметра π_k газотурбинного двигателя:

pikZ – заданное значение степени повышения давления за компрессором π_k , pikReal – измеренное значение π_k ,
 pikModel – моделируемое значение π_k

В результате проведенного компьютерного моделирования установлено, что среднеквадратическая ошибка модельных значений измеряемой режимной переменной в виде степени повышения давления за компрессором π_k относительно фактически измеренных составляет для ММСС 0,72%, что подтверждает высокую точность предлагаемых новых ММ.

Заключение

Предложенные в работе новые формы математических моделей процессов управления и контроля параметров объектов энергетики представляют собой аппроксимационное преобразование моделей пространства состояний и имеют предпочтение для получения оценок неизмеряемых и косвенно измеряемых параметров в системах управления, контроля и диагностики.

Дальнейшее усовершенствование предлагаемых форм ММ может быть достигнуто путем применения соответствующих методов оценки матриц в моделях пространства состояний непосредственно по базам данных эксплуатации, а также путем повышения точности оценок статических характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Епифанов С.В. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей / [С.В. Епифанов, В.И. Кузнецов, И.И. Богаенко и др.]. – К.: Техника, 1998. – 312 с.
2. Шевяков А.А. Оптимизация многомерных систем управления газотурбинных двигателей / [А.А. Шевяков, Т.С. Мартыанова и др.]. – М. : Машиностроение, 1989. – 256 с.
3. Гольберг Ф.Д. Математические модели газотурбинных двигателей как объектов управления / Ф.Д. Гольберг, А.В. Батенин. – М.: МАИ, 1999. – 80 с.
4. Лейбов Р.Л. Системы с неопределенными собственными значениями / Р.Л. Лейбов. – М.: Изд. асс. строит. вузов, 2006. – 184 с.
5. Куликов Г.Г. Марковские модели сложных динамических систем: идентификация, моделирование и контроль состояния / [Г.Г. Куликов, П.Дж. Фле-минг, Т.В. Брейкин и др.]. – Уфа.: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 1998. – 104 с.
6. Миргород В.Ф. Модальная и интегральная формы математических моделей газотурбинных двигателей / В.Ф. Миргород, В.М. Грудинкин // Вестник двигателестроения. – 2008. – № 3 – С. 185-189.