

УДК 539.3

В.М. Ахундов, Т.А. Скрипочка

О ТОРЦЕВОМ КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРОВ ИЗ СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной статье производится сравнение результатов исследования больших деформаций торцевого кручения круглого эластомерного цилиндра из однородного материала, полученных на основе общих соотношений нелинейной теории упругости и по ранее известной частной нелинейной модели.

Ключевые слова: эластомерный цилиндр, торцевое кручение, сравнительный анализ, моделирование цилиндрического тела.

В работе [1] представляется моделирование круглого цилиндрического тела при больших упругих деформациях растяжения, раздувания и кручения. Уравнения цилиндра получаются в условиях плоской, изменяющейся только по радиальным направлениям в поперечных сечениях деформации. На основе численной реализации построенной модели проведено исследование кручения сплошного и полого цилиндров из эластомерного материала и выполнен анализ особенностей их деформационного поведения.

Приведенные в [1] результаты численного исследования деформаций кручения сплошного и полого цилиндров получили, используя упругий потенциал, учитывающий сжимаемость эластомерного материала цилиндра. Модель деформации торцевого кручения цилиндра, отраженная в [2], является аналитической и имеет частный характер, поскольку построена на базе конкретной формы упругого потенциала несжимаемого материала.

1. Условия исследования торцевого кручения цилиндров на основе сопоставляемых моделей. Достаточно длинное цилиндрическое тело со сплошным поперечным сечением круговой формы испытывает плоскую деформацию торцевого кручения, обусловленную кинематическими условиями на торцевых поверхностях цилиндра. Задача о данной деформации кругового цилиндра в рамках нелинейной теории упругости для случая изотропного несжимаемого материала была решена А.И. Лурье (см. [2]). Упругие свойства

несжимаемого материала описываются автором с помощью потенциала Муни [3]

$$W = \frac{1}{2} \left[C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \right].$$

Для крутящего момента на основе применения данного потенциала получена формула

$$T = 2J_p \left(C_1 + \frac{C_2}{L} \right) \alpha. \quad (1)$$

Здесь $J_p = \frac{\pi a^4}{2}$ – полярный момент инерции сечения; a – радиус

поперечного сечения цилиндра; $\alpha = \frac{\theta}{L}$ – относительный угол

закручивания цилиндра; приходящийся на единицу его длины в деформированном состоянии; θ – относительный угол закручивания, приходящийся на единицу длины цилиндра в исходном состоянии, L – кратность осевого удлинения; C_1 и C_2 – постоянные материала.

Принимаются значения констант $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{G}{2}$ (усеченный потенциал Муни), тогда выражение (1) записывается в виде

$$T = \frac{\pi a^4 E}{4(1+\nu)} \cdot \frac{\theta}{L}, \quad (2)$$

где G – модуль сдвига. Кратность удлинения цилиндра при его свободных торцах определяется по формуле (при $C_2 = 0$)

$$L = \sqrt[3]{\frac{4 + \theta^2 a^2}{4}}. \quad (3)$$

При формальном решении задачи торцевого кручения для цилиндра из сжимаемого материала на основе модели [2] использовали значения модуля сдвига, определенные по формуле

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где E – модуль упругости, ν – параметр сжимаемости

материала. Расчеты по нелинейной модели [1] плоской деформации торцевого кручения производили для эластоматериалов при значениях параметра сжимаемости $\nu = 0,45, 0,46, 0,499$, последнее из которых отвечает слабосжимаемому резиновому материалу. Для всех материалов принимали модуль упругости $E = 4 \text{ МПа}$. Упругие свойства

материала цилиндра описывали при этом с помощью потенциала Левинсона–Буржеса [4]

$$W_m = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \left[\beta_m(I_1 - 3) + (1 - \beta_m)(I_2 I_3^{-1} - 3) + 2(1 - 2\beta_m)(\sqrt{I_3} - 1) \right] + \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2$$

(дополнительную константу материала принимали как $\beta = 1$).

2. Обсуждение результатов исследования на основе сопоставляемых моделей. Результаты исследований по нелинейной и частной нелинейной моделям представлены в виде графиков. На рис. 1 приведены кривые модулей радиальных перемещений $|u_{3b}|$ точек цилиндра в зависимости от угла закручивания θ . Кривые, рассчитанные по частной и общей нелинейным моделям, отвечают сжимаемым материалам с параметрами $\nu = 0,46$ и $0,45$ и практически

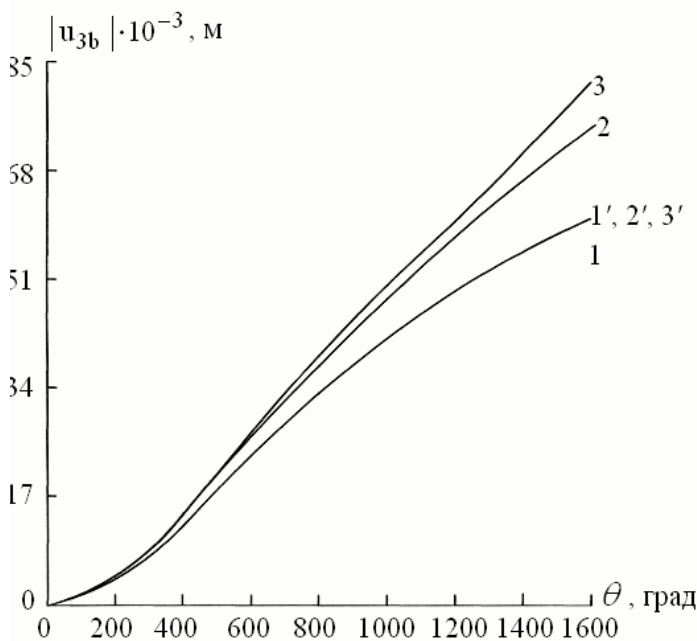


Рис. 1. Распределения радиальных перемещений $|u_{3b}|$ по толщине стенки цилиндра в зависимости от угла закручивания θ , рассчитанные по нелинейной $\nu = 0,499$ (1), $0,46$ (2) и $0,45$ (3) и по частной нелинейной $\nu = 0,499$ (1'), $0,46$ (2') и $0,45$ (3') моделям

несжимаемому материалу $\nu = 0,499$. При расчетах по частной нелинейной модели все три приведенные кривые совпадают. График для материала с параметром сжимаемости $\nu = 0,499$ на основе общей модели [1] совпадает с тремя кривыми, полученными по частной модели [2] и демонстрирует

возможность применения модели [1] для несжимаемых материалов. Иначе обстоит дело со сжимаемыми материалами $\nu = 0,46$ и $0,45$, в случае которых частная нелинейная теория является малопригодной.

В этом случае необходимо пользоваться нелинейной моделью [2]. Наибольшее перемещение точек внешней лицевой поверхности $|u_{3b}| = 81,6$ мм получает цилиндр, изготовленный из материала с наибольшей сжимаемостью (наименьшим параметром сжимаемости $\nu = 0,45$). Чем более материал сжимаем, тем большие радиальные перемещения получает цилиндр при одном и том же угле закручивания.

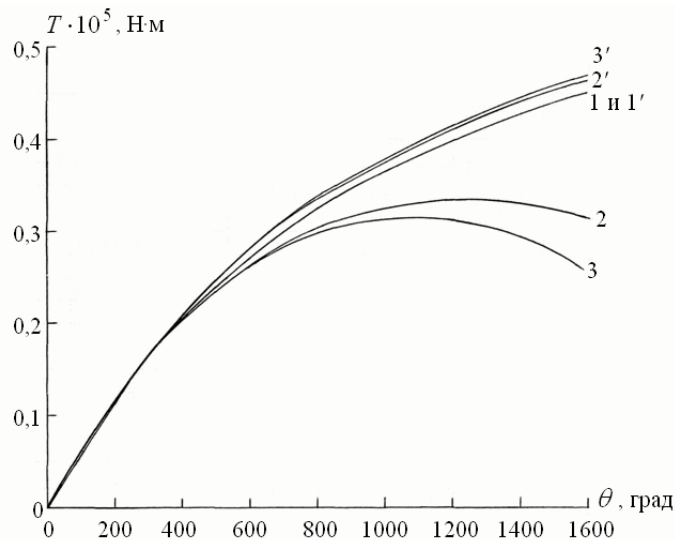


Рис. 2. Зависимости крутящего момента T , возникающего в поперечных сечениях однородного цилиндра от угла закручивания θ , рассчитанные по нелинейной $\nu = 0,499$ (1), 0,46 (2), 0,45 (3) и по частной нелинейной $\nu = 0,499$ (1'), 0,46 (2') и 0,45 (3') моделям

На рис.2 представлены кривые зависимостей крутящего момента T от угла закручивания θ . Для цилиндра из слабожимаемого материала $\nu = 0,499$ крутящие моменты, полученные по нелинейной модели [1], практически совпадают с крутящими моментами, полученными по частной нелинейной модели [2]. Как и следовало ожидать, цилиндр из слабожимаемого материала можно рассчитывать как по построенной нелинейной, так и по ранее известной модели. В то же время для сжимаемых материалов $\nu = 0,46$ и 0,45 кривые,

полученные по общей и частной нелинейным моделям значительно различаются. Кривые, построенные по модели [2] при $\nu = 0,46$ и 0,45, как и при $\nu = 0,499$, демонстрируют монотонно возрастающие зависимости. Тогда как в случае более точной модели [1] при параметрах $\nu = 0,46$ и 0,45 достигаются предельные по крутящим моментам углы закручивания $\theta_{пред} = 1300$ и 1100 град соответственно. При этих углах закручивания крутящие моменты в поперечных сечениях цилиндров становятся наибольшими. При

дальнейшем возрастании углов закручивания крутящие моменты в поперечных сечениях цилиндров уменьшаются. Таким образом, применение частной нелинейной модели является ограниченным. С ее помощью можно описывать поведение цилиндров при больших деформациях из слабосжимаемых материалов. В области малых углов закручивания $0 \leq \theta \leq 400 \text{ град/м}$ кривые, рассчитанные по 2-м моделям мало отличаются между собой. Это тот диапазон углов закручивания, при котором можно пользоваться результатами из нелинейной модели [2].

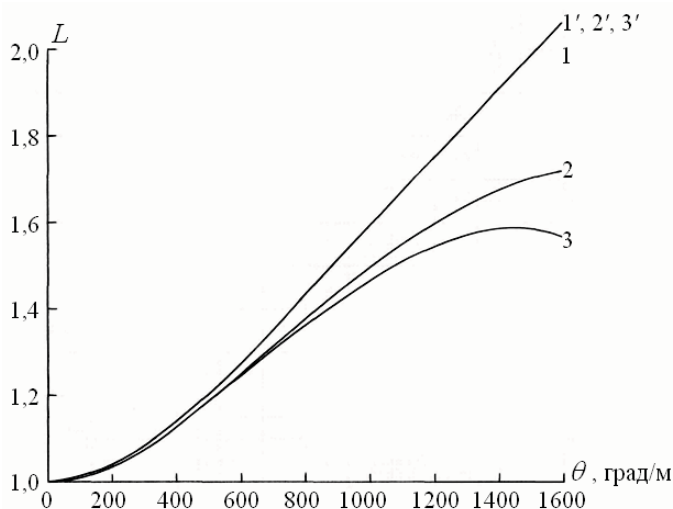


Рис. 3. Зависимости кратностей осевого удлинения L цилиндра от угла закручивания θ , рассчитанные по нелинейной $\nu = 0,499$ (1), $0,46$ (2) и $0,45$ (3) и по частной нелинейной $\nu = 0,499$ (1'), $0,46$ (2') и $0,45$ (3') моделям

На рис. 3 показано изменение кратностей осевого удлинения L цилиндра в зависимости от угла закручивания θ . Значения удлинений для слабосжимаемого $\nu = 0,499$ материала, полученные по нелинейной и частной нелинейной моделям совпадают. При исследовании эластомерного материала цилиндра по частной нелинейной модели сжимаемость материала на результаты не влияет и все три кривые совпадают (при наибольшем задаваемом угле закручивания $\theta = 1600^\circ \text{ град}$

для значений параметров сжимаемости $\nu = 0,499$, $0,46$ и $0,45$ кратности осевого удлинения для всех материалов равны $L = 2,064$). Графики, построенные по нелинейной модели [1], демонстрируют различия между собой в зависимости от параметра сжимаемости материала.

Для весьма сжимаемого материала $\nu = 0,45$ имеет место достижение предельного по осевому удлинению угла закручивания $\theta_{пред} \approx 1400 \text{ град}$. При данном угле закручивания осевое удлинение

цилиндра наибольшее. При дальнейшем увеличении угла закручивания цилиндра его осевая длина в деформированном состоянии уменьшается.

4. Заключение. Был проведен сравнительный анализ результатов расчетов торцевого кручения круглого резиноцельного цилиндра, полученных по общей [1] и частной [2] нелинейным моделям. Выявленные отличия между деформационными характеристиками на основе данных моделей объясняются тем, что модель [1] построена на основе уравнений нелинейной теории упругости с применением физических соотношений, учитывающих сжимаемость упругого материала цилиндра. Тогда как модель [2] основывается на использовании частного потенциала для несжимаемого упругого тела и приводит к значительным погрешностям расчетов цилиндров из существенно сжимаемых материалов. Обнаружили явление достижения предельных по крутящим моментам и осевым удлинениям углов закручивания для цилиндра из сжимаемых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахундов В.М. Большие деформации растяжения, раздувания и кручения круглого цилиндра // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць / Дніпропетр. нац. ун-т, 2004. – Вип. 8. – С. 9–20.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. –М.: Наука, 1980.– 512 с.
3. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
4. Levinson M. and Burgess I.W. A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials // Int. J. Mech. Sci. – 1971. – Vol. 13. – P. 563–572.