

УДК 530.1

А.О.Журба, О.І.Михальов

## ПОБУДОВА ФРАКТАЛЬНИХ РОЗПОДІЛЕНЬ ПОВЕРХОНЬ ПЕНРОУЗА

*В статті розглянуто побудову фрактальних поверхонь на основі двох типів мозаїк Пенроуза з різноманітними розфарбуваннями та різною кількістю ітерацій. Розраховані фрактальні розмірності побудованих поверхонь та проведений аналіз отриманих результатів. Побудовано фрактальні розподілення для цих поверхонь.*

*Ключові слова: фрактал, мозаїка Пенроуза, фрактальна розмірність, фрактальна поверхня, фрактальне розподілення.*

Фрактали з великою точністю описують багато фізичних явищ і природних утворень: гори, хмари, дерева, ландшафти... Вперше фрактальну природу світу виявив Бенуа Мандельброт[1]. Головною особливістю фракталів є їх нескінченна самоподібність. Фрактальні функції широко використовуються як інструменти для реалістичної побудови природних об'єктів. Фрактальні поверхні дозволяють отримати будь-який рівень деталізації, незалежно від того, на якій відстані від них ми знаходимось[2,4].

В роботі запропоновано побудову фрактальних поверхонь на основі мозаїк Пенроуза. Мозаїка Пенроуза, як і фрактал, має важливу властивість – самоподібність[2,3]. Побудова мозаїки реалізується по певному алгоритму, унаслідок чого вона виявляється не випадковою, а впорядкованою структурою. Будь-яка її кінцева частина зустрічається у всій мозаїці незліченно безліч разів. В мозаїці можна виділити багато правильних десятикутників, що мають абсолютно однакові орієнтації. Вони створюють дальній орієнтаційний порядок, названий квазіперіодичним. Це означає, що між видаленими структурами мозаїки існує взаємодія, яка погоджує розташування і відносну орієнтацію ромбів цілком певним, хоча і неоднозначним способом. Послідовно закрашені ромби утворюють п'ять сімейств подібних паралельних ліній, пересічних під кутами, кратними  $72^\circ$ . Напрями цих ламаних ліній відповідають напрямкам сторін правильного п'ятикутника. Тому мозаїка Пенроуза має

поворотну симетрію 5-го порядку і в цьому сенсі подібна до квазікристала[3]. Принципи побудови мозаїки Пенроуза можуть використовуватися при побудові фрактальних поверхонь.

Побудова фрактальних поверхонь на основі мозаїк Пенроуза починалася з розбиття кожного складового цієї мозаїки чотирикутника на два трикутника. Після чого кожен трикутник піддавався наступному алгоритму. Середні крапки сторін трикутника з'єднувалися між собою, так що трикутник виявлявся розділеним на чотири менших трикутника. Потім кожна середня крапка зрушувалася нагору або вниз на певну, випадково обрану величину. Той же процес застосовувався до кожного з менших трикутників, потім до ще меншого й так далі нескінченно. Після досить великої кількості ітерацій починає виникати усе більше деталізована поверхня (рисунок 1).

У цьому методі зсуву середніх крапок випадкові величини для переміщення середніх крапок нагору або вниз управляються певним законом розподілу, що ретельно підбирається, щоб одержати близьку апроксимацію бажаної поверхні. Для того щоб поверхня була більш гладкою, у перетворення варто ввести правило, відповідно до якого величина зсуву середніх крапок повинна ставати дуже малою вже після декількох перших ітерацій. Таке правило дозволяє додавати лише невеликі «купини» до загальних обрисів ландшафту. Для подання порізаної поверхні, характерної, скажімо, для гірського хребта або берегової лінії, більше підходящим буде правило повільного зменшення зсувів після кожного кроку ітераційного процесу[2].

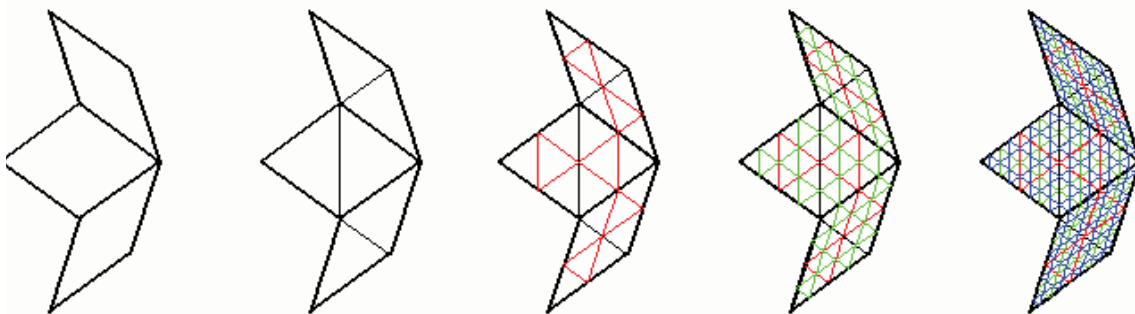


Рисунок 1 – Етапи побудови фрактальних поверхонь

В роботі було побудовано чисельну кількість фрактальних поверхонь з використанням наведеного алгоритму. Фрактальні поверхні були побудовані на основі двох видів мозаїки Пенроуза –

мозаїки Пенроуза, побудованої за допомогою «золотих» ромбів і мозаїки Пенроуза, побудованої за допомогою «змій» та «дротиків» (рисунок 2) використовуюючи певний вид розфарбування. Кожну з поверхонь можна побудувати з різною кількістю ітерацій, яка відповідає за ступінь деталізації поверхні.[4]

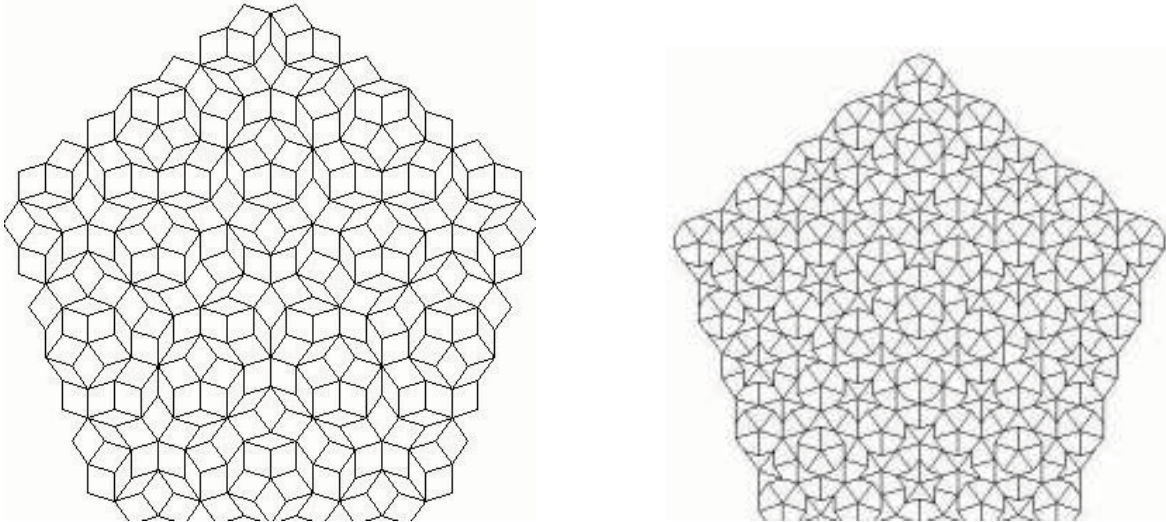


Рисунок 2 – Мозаїки Пенроуза, побудовані за допомогою «золотих» ромбів (ліворуч) та за допомогою «змій» та «дротиків» (праворуч)

На рисунку 3 представлені зображення фрактальної поверхні з кількістю ітерацій 4 та 9. Зображення представлені у чорно-білих кольорах, де чорним кольором зазначені області, що не підлягали обробці алгоритмом (найнижчі точки), білим кольором – найвищі точки. З рисунку видно, що чим більша кількість ітерацій, тим більше білих точок на зображенні і тим точніше деталізація поверхні.

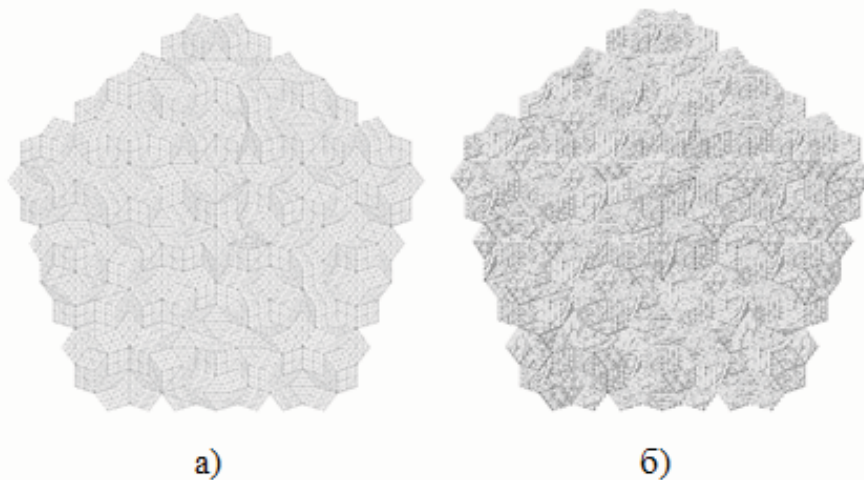


Рисунок 3 - Фрактальна поверхня на основі мозаїки Пенроуза (рисунок інверсовано) з кількістю ітерацій 4 (а) та 9 (б)

За допомогою розробленого програмного забезпечення було побудовано 31 вид фрактальних поверхонь з використанням двох типів мозаїки Пенроуза і восьми видів розфарбування мозаїк з кількістю ітерацій від чотирьох до дев'яти (рисунок 4).

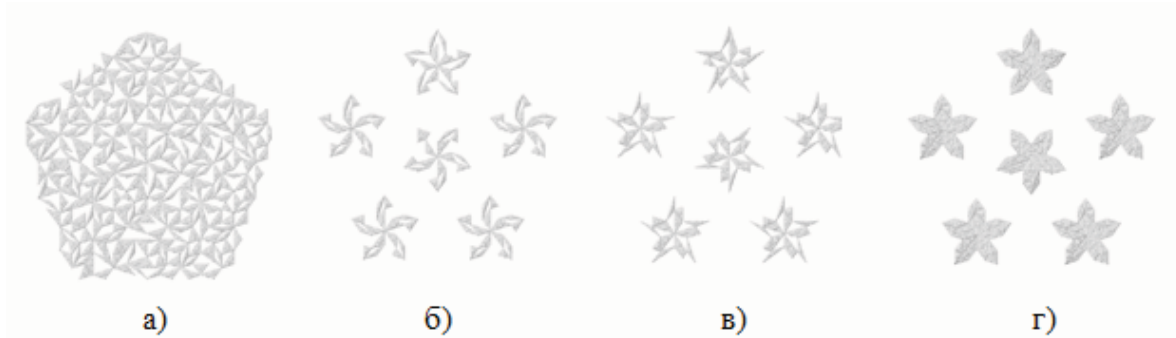


Рисунок 4 – Приклади фрактальних поверхонь, побудованих на основі мозаїк Пенроуза з кількістю ітерацій 7 (зображення інверсовано)

Після генерації поверхонь, побудованих на основі мозаїк Пенроуза, необхідно розрахувати їх фрактальні розмірності. Фрактальна розмірність є одною з основних характеристик фрактала. Фрактал являє собою геометричний об'єкт, що характеризується нерегулярністю, але самоподібністю, що означає, що об'єкт одноманітно улаштований на різноманітних масштабах його розглядання. Тобто передбачається незмінність основних геометричних особливостей об'єкту при зміні масштабу. Нерегулярність об'єкту означає деяку його дробову (фрактальну) розмірність, яка відрізняє його від розмірності лінії, поверхні чи простору [4].

Фрактальна розмірність була розрахована методом BOX COUNTING, який може бути застосований до зображень будь-якої структури. Цей метод дозволяє визначити фрактальну розмірність не суворо самоподібних об'єктів. Для оцінки box-розмірності, евклідовий простір, що містить зображення об'єкта, розділяють сіткою з осередком розміром  $r$  та підраховуються непусті, зайняті об'єктом, що досліджується, квадрати  $N(r)$ . Далі розмір  $r$  зменшують і знову підраховують кількість непустих полів  $N(r)$  (рисунок 5). Нахил графіку в логарифмічному масштабі  $N(r)$  від  $1/r$  відповідає величині розмірності (рисунок 6)[4].

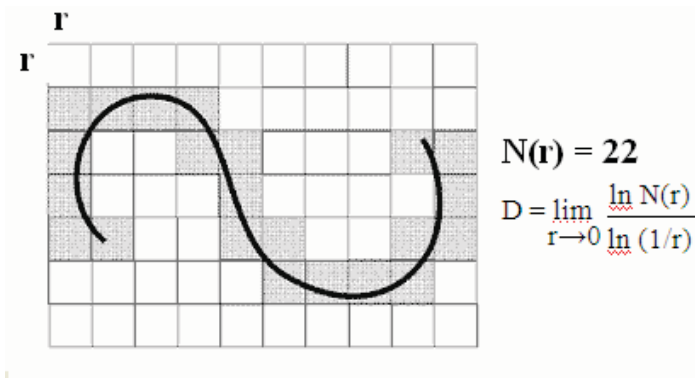


Рисунок 5 – Приклад розбиття зображення поверхні при методі BOX COUNTING

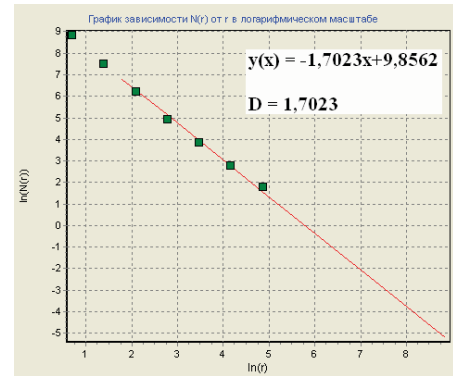


Рисунок 6 – Графік залежності  $N(r)$  від  $r$  в логарифмічному масштабі

У роботі були розраховані фрактальні розмірності побудованих фрактальних поверхонь на основі двох типів мозаїк Пенроуза з різними розфарбуваннями з кількістю ітерацій від 4 до 9. Таким чином, було проаналізовано 186 зображень різноманітних фрактальних поверхонь. Значення фрактальних розмірностей для цих поверхонь дуже близькі і в середньому дорівнює 1,88. Цей факт свідчить про те, що ані тип мозаїки Пенроуза, ані вид розфарбування не змінює властивості фрактальних поверхонь, побудованих на їх основі. А незмінність фрактальних розмірностей при різних кількостях ітерацій це раз говорить про самоподібність поверхонь.

На рисунку 7 зображені приклади фрактального аналізу поверхні, побудованої на основі мозаїки Пенроуза: розрахована її фрактальна розмірність та побудовані розподілення фрактальних розмірностей при різних значеннях розміру осередків, на які розбиваються зображення.

Аналіз фрактального розподілення, зображеного на рисунку 7, показує наявність особливих зон на розподіленні фрактальних розмірностей отриманому при різних розмірах осередків розбиття (“тяжелый хвост”), що підкреслює регулярність фрактальної поверхні в діапазоні 1,75 – 1,77.

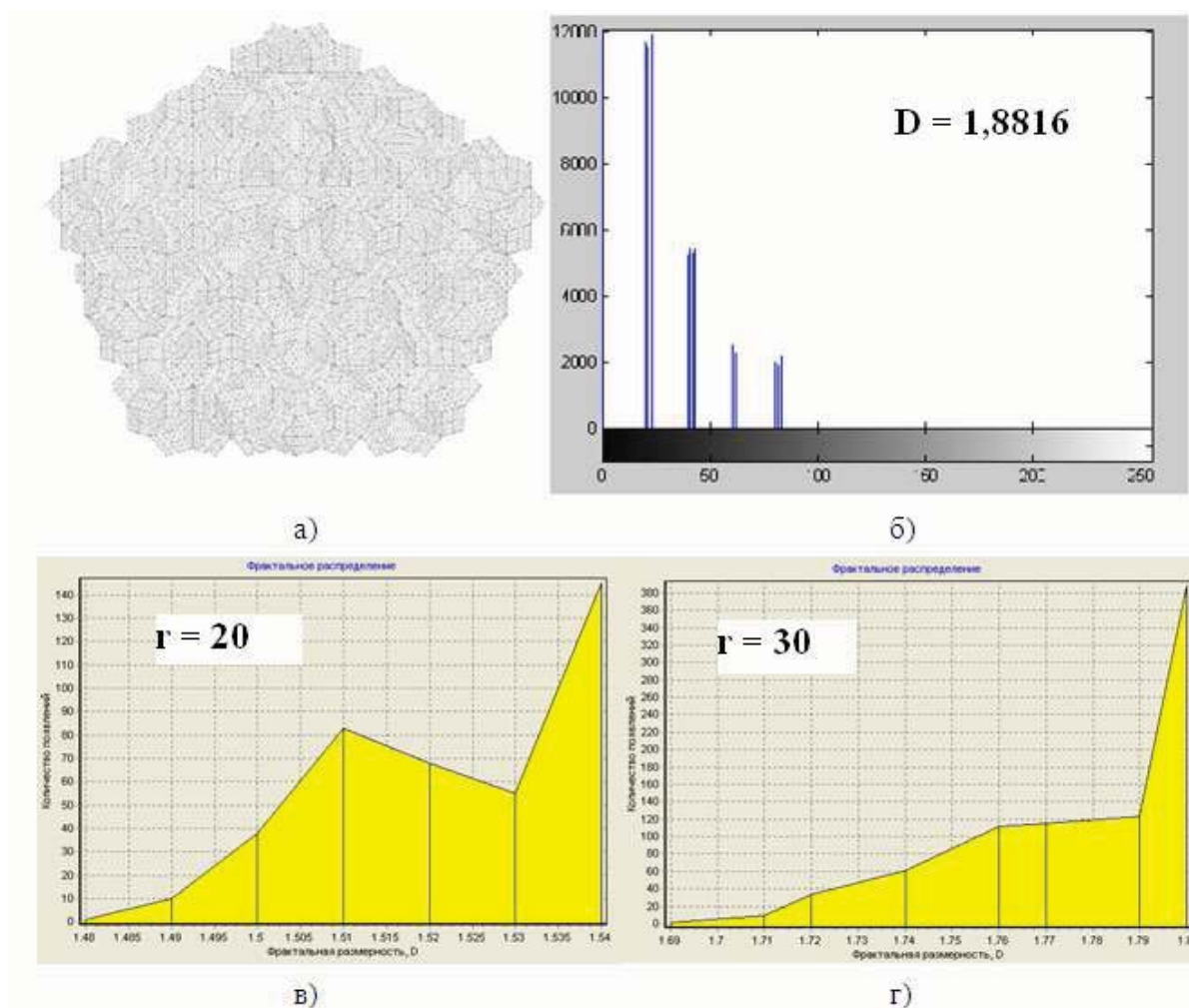


Рисунок 7 – Фрактальный анализ поверхности, построенной на основе мозаики Пенроуза: а - изображение поверхности; б – гистограмма яркостей; в – распределения фрактальных размерностей при разбитии изображения на 400 фрагментів ( $r = 20$ ); г – распределения фрактальных размерностей при разбитии изображения на 900 фрагментів ( $r = 30$ )

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Федер Е. Фракталы /Пер. с англ.-М.: Мир, 1991.
3. Горбонос А.О., Михальов О.І. Модель Пенроуза як основа для побудови фрактальних поверхонь квазікристалів //Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3(68). – Дніпропетровськ, 2010. – с.163-168.
4. Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А. и др. Новейшие методы обработки изображений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.