УДК 536.24:622.233

А.Ю. Дреус, Е.Е. Лысенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТЕПЛОВЛАГОПЕРЕНОСА В ПРОМЕРЗАЮЩЕЙ КРУПНОДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ

Представлены математическая модель и эффективный алгоритм расчета, основанный на введении фиктивной влажности, для численного исследования процесса промерзания крупнодисперсной среды. На основе предложенных модели и алгоритма выполнен расчет температурных и влажностных полей в криогенно-гравийном фильтре во время его замораживания.

Фазовые переходы, дисперсная среда, температура, влажность, алгоритм расчета.

Постановка и анализ состояния проблемы

Во многих практических задачах горные породы, строительные материалы, сыпучие продукты и другие пористые объекты рассматриваются как многокомпонентные дисперсные системы, одним из компонентов которых является вода. Изучение таких систем при пониженных температурах обусловливает необходимость учета фазовых переходов.

Процессы тепло- и массопереноса в дисперсных средах при их промерзании или протаивании являлись предметом исследований достаточно большого количества работ, например [1–7]. Особенности такого рода задач, такие как: существенная нелинейность, необходимость учета взаимного влияния тепловых и влажностных полей, неопределенность закона движения границы фазового перехода и др., делают численные методы основным инструментом для их решения.

К проблемам математического моделирования задач промерзания-протаивания дисперсных сред также следует отнести сложность корректного описания фазового состояния воды, универсальной функции состояния которой не получено. Это заставляет обращаться к эмпирическим данным при решении каждой конкретной задачи. В настоящей работе для определения уравнения

 ISSN 1562-9945

незамерзшей воды и функции льдистости использованы экспериментальные данные, представленные в работе [4].

Заметим, что построение алгоритма численного расчета взаимосвязанных процессов тепло- и влагопереноса, при наличии фазовых переходов, осложняется постоянно изменяющейся геометрией расчетной области за счет движения границы раздела фаз, вследствие чего расчетные области для решения уравнений переноса тепла и влаги в общем случае не совпадают. Массоперенос имеет место преимущественно в талой зоне, где влага мигрирует к границе фазового перехода. В тоже время процессы теплопереноса следует рассматривать во всей области, с учетом изменяющегося влагосодержания в области фазовых превращений.

Для организации эффективной процедуры сквозного счета в ряде работ [6] предложен подход, основанный на введении некоторого фиктивного влагосодержания с рассмотрением его во всей области. В настоящей работе рассмотрен один из таких алгоритмов, который использован для расчета промерзания гравийного образца.

Цель работы

Построение математической модели тепло- и влагопереноса промерзания крупнодисперсной среды. Определение параметров такой модели и построение алгоритма расчета с использованием фиктивного влагосодержания.

Математическое описание задачи

Будем рассматривать процесс промерзания влагонасыщенной цилиндрической стенки, изготовленной из крупнодисперсного материала (песок, гравий). Без потери общности изложения ограничимся одномерным случаем, рассматривая процессы переноса только в радиальном направлении. Будем пренебрегать процессами морозного пучения материала и переноса влаги вследствие термического градиента. Также предположим, что теплообмен с окружающей средой происходит только посредством конвекции.

Процессы тепло- и влагопереноса с учетом фазового перехода вода-лед будут описываться системой уравнений А.В. Лыкова [3]

$$c_{ef}(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\lambda(T,\omega)\frac{\partial T}{\partial r}\right),\ R_1\le r\le R_2,\ \tau>0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot k\left(T,\omega\right)\frac{\left(1-i\left(T\right)\right)\partial\omega}{\partial r}\right),\ R_1\le r\le R_2,\ \tau>0, \qquad (2)$$

с граничными и начальными условиями

$$\lambda\left(T,\omega\right)\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_1}=\alpha_1\left(T-T_{s1}\right), \qquad (3)$$

$$\lambda\left(T,\omega\right)\cdot\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_2}=\alpha_2\left(T-T_{s2}\right), \qquad (4)$$

$$\left.T\right|_{\tau=0}=T_0, \qquad (5)$$

$$k\left(T,\omega\right)\cdot\left.\frac{\partial\omega}{\partial r}\right|_{r=R_1}=k\left(T,\omega\right)\left.\frac{\partial\omega}{\partial r}\right|_{r=R_2}=0, \qquad (6)$$

$$\left.\omega\right|_{\tau=0}=\omega_0, \qquad (7)$$

где T - температура, c_{ef} - эффективная теплоемкость дисперсной среды, ρ - плотность дисперсной среды, λ - коэффициент теплопроводности дисперсной среды, R_1,R_2 - внутренний и внешний радиусы цилиндрической стенки, ω - влагосодержание системы, k - коэффициент влагопроводности дисперсной среды, τ - время, $i(T)$ - функция льдистости, представляющая собой отношение массы льда к массе всей воды.

В системе (1) – (7) коэффициенты теплопроводности и влагопроводности определяются следующим образом

$$\lambda\left(T\right)=\lambda_m+\left(\lambda_t-\lambda_m\right)\left(1-i\left(T\right)\right),$$

$$k\left(T,\omega_w,\omega_l\right)=k_1\left(T\right)\cdot e^{\left(k_2\omega_w-k_3\omega_l\right)},$$

$$k_1\left(T\right)=1,4\cdot10^{-8}\left(1+0,04T\right),\ k_2=0,172,\ k_3=0,23,$$

где λ_m - коэффициент теплопроводности мерзлой дисперсной среды, λ_t - коэффициент теплопроводности талой дисперсной среды, ω_w, ω_l - распределение влагосодержания в талой и мерзлой зоне [6].

Эффективная теплоемкость дисперсной среды определяется выражением [7]

$$c_{ef}=\left(1-m\right)c_{sk}+m\cdot i\left(T\right)c_m+m\left(1-i\left(T\right)\right)c_t+m\cdot L\cdot\frac{di\left(T\right)}{dT},$$

где m - пористость дисперсной среды, c_{sk},c_m,c_t - теплоемкости скелета, льда и воды соответственно. Использование эффективной теплоемкости в уравнении (1) позволяет организовать процедуру расчета без явного выделения границы фазового перехода, предполагая, что процесс фазового превращения происходит в некотором интервале температур. В соответствии с данными [4] для фазового перехода «вода-лед» в крупнодисперсной среде такой интервал, в течение которого почти вся вода замерзает, будет достаточно небольшим (менее 1 градуса). Функция льдистости может быть определена следующим образом [5]

$$i(T)=\begin{cases}0, T>T_n\\ i_0\cdot\dfrac{1-e^{\gamma(T-T_n)}}{1-e^{\gamma(T_k-T_n)}}, T_n\le T\le T_k\\ i_0, T<T_\kappa\end{cases},$$

где i_0 - начальная льдистость, γ - коэффициент, характеризующий степень связанности воды в дисперсной среде, T_n, T_k - температура начала и конца фазового перехода соответственно.

Функцию незамерзшей воды определим следующим образом [6]

$$\omega_{nw}(T,\omega)=\begin{cases}\omega_{ps}, T\le T_k\\ \omega_{ps}+\dfrac{T-T_k}{T_n-T_k}\cdot\left(\omega_0-\omega_{ps}\right), T_k<T\le T_n\\ \omega_0, T_n<T.\end{cases},$$

где ω_{ps} - прочносвязанная влажность, ω_0 - начальная влажность.

Следуя [6], введем для упрощения алгоритма расчета некоторое фиктивное влагосодержание ϖ в виде

$$\varpi=\left(1-i(T)\right)\omega. \tag{8}$$

Тогда вместо уравнения (2) запишем уравнение:

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\tau}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(k(T,\omega)\frac{\partial\varpi}{\partial r}\right), \tag{9}$$

которое совпадает с уравнением (2) в талой зоне, и описывает распределение некоторого фиктивного влагосодержания в зоне промерзания.

Таким образом, для численного решения задачи (1)–(7) предлагается следующий алгоритм.

В расчетной области вводится единая для расчета температуры и влажности пространственная сетка. На этапе охлаждения (до начала фазовых переходов) численно решается уравнение переноса тепла (1). По достижении на одной из границ температуры начала фазового перехода начинается расчет переноса влаги, который будет обусловлен изменением льдистости по пространственной координате. При этом сначала рассчитывается фиктивное влагосодержание ϖ из решения уравнения (9), а затем по соотношению (8) определяется реальное влагосодержание.

Пример расчета

В качестве примера численного расчета была решена одномерная задача о замораживании водонасыщеной гравийной цилиндрической стенки. Такая задача представляет интерес в связи с разработкой новой технологии изготовления гравийных фильтров [8] для оснащения буровых скважин. Таким образом, исходные данные были взяты в соответсвии с реальными параметрами технологии по созданию криогенно-гравийных фильтров: $T_0 = 298K$, $\omega_0 = 15\%$, $T_s = 252K$, $R_1 = 0,055м$, $R_2 = 0,09м$, $c_{sk} = 0.92\frac{кДж}{кг \cdot K}$, $c_m = 2,1\frac{кДж}{кг \cdot K}$, $c_t = 4,19\frac{кДж}{кг \cdot K}$, $\rho_{sk} = 2000\frac{кг}{м^3}$, $\rho_m = 920\frac{кг}{м^3}$, $\rho_t = 1000\frac{кг}{м^3}$, $\lambda_{sk} = 2\frac{Вт}{м \cdot K}$, $\lambda_m = 2,22\frac{Вт}{м \cdot K}$, $\lambda_t = 0,612\frac{Вт}{м \cdot K}$, $m = 0,3$, $L = 334 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг}$, $i_0 = 0,98$, $\omega_{ps} = 2\%$.

Численный расчет был проведен по вышепредложенному алгоритму с применением схемы сквозного счета без явного выделения границы фронта фазового перехода. Результаты расчета в виде распределения температуры и влагосодержания по толщине образца с течением времени, а также в виде графика продвижения фронта фазового перехода представлены на рис. 1 – 3.

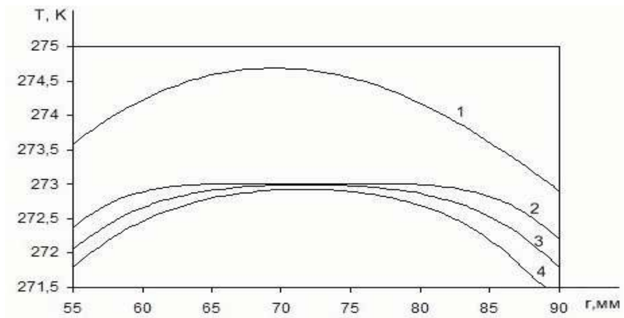

Рис. 1. Распределение температуры по радиусу образца через:
1 – 3 часа;
2 – 3,5 часа;
3 – 4 часа;
4 – 4,5 часа.

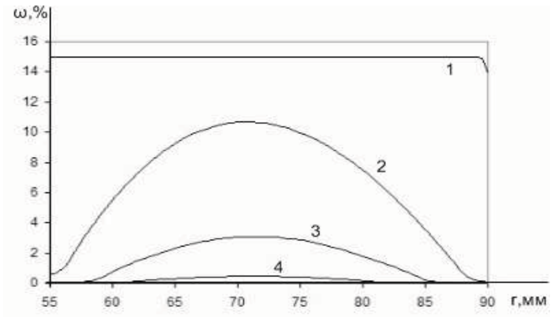

Рис. 2. Распределение влагосодержания по радиусу образца через:
1 – 3 часа;
2 – 3,5 часа;
3 – 4 часа;
4 – 4,5 часа.

 ISSN 1562-9945

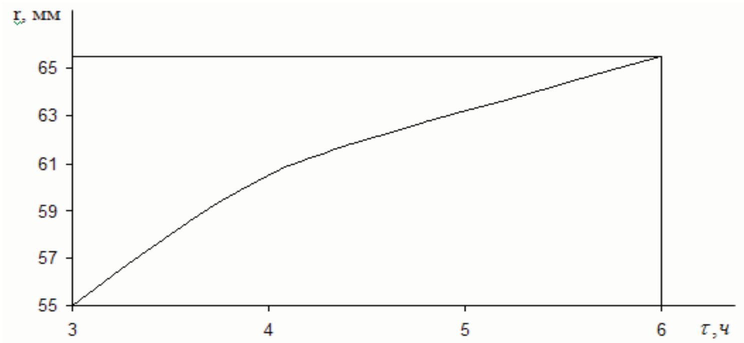

Рис. 3. Продвижение фронта фазового перехода.

Представленные результаты позволяют оценить температурные и временные характеристики процесса, что представляет интерес с точки зрения организации технологического процесса замораживания.

Выводы

В работе предложены математическая модель и алгоритм расчета для решения одномерной задачи тепло- и влагопереноса в промерзающей крупнодисперсной среде. Предложенный алгоритм позволяет построить вычислительную процедуру на основе метода сквозного счета с единой для решения уравнений переноса тепла и влаги расчетной сеткой. Представленные модель и алгоритм могут быть использованы для исследования процессов заморозки пористых дисперсных сред с целью определения рациональных технологических режимов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск : Наука, 1986. - 240 с.

Иванов Н.С. Тепло- и массоперенос в мерзлых горных грунтах. М.: Наука, 1969. - 240 с.

2. Лыков А. В. Теория сушки. - М.: Энергия, 1968. – 472 с.

Нерсесова З. А. Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры // Доклады АН СССР, Т. 75, № 6, 1950. – С. 845 – 846.

3. Колесников А. Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // Доклады АН СССР, Т. 82, № 6, 1952. – С. 889 – 891.

4. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. – Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ние, 1989. – 86 с.

5. Поврезнюк Е. Б., Рядно А. А. Математическая модель промерзания (оттаивания) малопроницаемой водонасыщеной пористой среды, содержащей воздух // Вісник ДНУ. Серія Механіка, Т. 1, Вип. 2, № 6, 1999. – С. 89 – 94.

6. Кожевников А. А., Гошовский С. В., Судаков А. К., Технология криогенно-гравийными фильтрами водоприемной части скважины// Породоразрушающий и металлообразующий инструмент, Вып. 12, 2009. – С. 62-64.