УДК 62-50:519.49

В.М. Григорьев

СТАБИЛИЗИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация. Показано, что необходимым и достаточным условием существования регулятора, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость замкнутой линейной нестационарной многосвязной системы, является экспоненциальная устойчивость системы однородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений, соответствующей левому наибольшему общему делителю операторных матриц объекта управления. Задача синтеза стабилизирующего регулятора, представимого в пространстве состояний, сведена к решению матричного операторного уравнения с устойчивой правой частью.

Ключевые слова: линейные нестационарные дифференциальные матричные операторные уравнения, экспоненциальную устойчивость замкнутой линейной нестационарной многосвязной системы, стабилизация.

Актуальность темы. Широкий класс объектов и систем управления адекватно представляются в виде системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с производными в правой части. Синтез динамических регуляторов таких объектов, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость замкнутой системы, является классической задачей теории автоматического управления.

Анализ последних исследований. Необходимым условие, предъявляемым к синтезируемой замкнутой системе, является её грубость, то есть способность сохранять свои свойства при малых вариациях параметров [1]. Известно [2], что правильные регуляторы, как правило, обеспечивают грубость всей системы в целом. Это объясняется тем, что при таких регуляторах имеет место постоянство порядка дифференциального уравнения замкнутой системы в случае вариации параметров. Примечательно, что правильные линейные системы и только правильные допускают представление в пространстве состояний [3].

В рамках полиномиального подхода к задаче стабилизации линейных стационарных систем получены необходимые и достаточные условия решения вопроса [4].

В данной работе предпринята попытка обобщить эти результаты на нестационарный случай.

Постановка задачи. Получить необходимые и достаточные условия стабилизируемости объекта управления, представленного в виде системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений с производными в правой части. Предложить процедуру синтеза стабилизирующего регулятора, реализуемого в пространстве состояний и обеспечивающего заданную степень экспоненциальной устойчивости замкнутой системы.

Обоснование полученных результатов. В пространстве сигналов X, состоящем из бесконечно дифференцируемых, за исключением конечного числа точек, функций, выделим подпространство функций M_α, имеющих вместе со всеми своими производными характеристический показатель Ляпунова [5] меньший отрицательного числа α.

Пусть в обратную связь к объекту

$$A_l\, x = B_l u, \tag{1}$$

где $A_l \in R^{n\times n}$, rank A_l=n, $B_l \in R^{n\times m}$, $x \in X^n$, $u \in X^m$ включен регулятор

$$Cv = Dw, \tag{2}$$

где $C\in R^{m\times m}$, rank C=m, $D\in R^{m\times n}$, $v \in X^m$, $w \in X^n$, $u=u_1-v$, $w=u_2+x$. Здесь R− кольцо линейных нестационарных дифференциальных операторов с коэффициентами из поля функций со строгим нулевым показателем Ляпунова, замкнутого относительно дифференцирования; $u_1 \in X^m$, $u_2 \in X^n$ − внешние задающие или возмущающие входы.

Перепишем замкнутую систему (1) и (2) в виде

$$\begin{bmatrix} A_l & B_l \\ -D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_l & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Определение 2. Объект (1) α-стабилизируем, если существует такой регулятор (2), что в замкнутой системе (3) при нулевых входах u_1 и u_2, выходы x и v лежат в M_a^n и M_a^m , соответственно. Такой регулятор назовём α-стабилизатором объекта (1).

Нахождение α-стабилизатора объекта равносильно стабилизации объекта с заданной степенью экспоненциальной устойчивости, меньшей заданного отрицательного числа α.

Следуя работе [6], приведём матрицу E= $\begin{bmatrix} A_l & B_l \end{bmatrix}$ нижней левой ступенчатой форме

$$EU= [C_l\ 0], \tag{4}$$

где U, $U^{-1} \in R^{(n+m)x(n+m)}$ и $C_l \in R^{nxn}$ – левый наибольший общий делитель (ЛНОД) матриц A_l и B_l.

Распишем матрицу

$$U = \begin{bmatrix} E_r & -B_r \\ F_r & A_r \end{bmatrix},\ E_r \in R^{n\times n},\ B_r \in R^{n\times m},\ F_r \in R^{m\times n},\ A_r \in R^{m\times m}. \tag{5}$$

В равенстве (4), при фиксированной матрице C_l, матрица U определена с точностью до её умножения справа на матрицу $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$,

где V, $V^{-1} \in R^{mxm}$. Это то же самое, что матрицы A_r и B_r в (5) определены с точностью до умножения их справа на V. Поэтому на основании работы [7] можно полагать, что A_r – собственная по столбцам матрица.

Совершим в (3) замену переменных

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \tag{6}$$

Из (4) и (5) имеем

$$\begin{bmatrix} C_l & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_l & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

где $\Delta_1 = CA_r + DB_r$ (8)

$\Delta_2 = CF_r + DE_r$ (9)

Рассмотрим условие α- стабилизируемости.

Утверждение 1. Если регулятор (2) стабилизирует объект (1), то один их ЛНОД C_l матриц объекта A_l и B_l лежит в множестве операторных матриц,

$$S_0(\mathcal{M}_\alpha^{\,n}) = \{s \in R^{n\times n} \mid \mathcal{M}_\alpha (sx=0^n) \Rightarrow x \in \mathcal{M}_\alpha^{\,n}\} \tag{10}$$

соответствующих системам однородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений со степенью экспоненциальной устойчивости равной α.

 ISSN 1562-9945

Доказательство. Из условия и определения 2.2 имеем, что при нулевых входах в замкнутой системе (3) элементы векторных выходов v и x лежат в $\mathcal{M}_\alpha$. Так как матрица U обратима над R, то в (6), получаем $\bar{x} \in \mathcal{M}_\alpha^{\ n}$. Следовательно, в равенстве (7) $C_l\bar{x}=0^n$. Что, согласно определению (10), означает истинность утверждения.

Утверждение 2. Пусть объект (1) строго правильный и один из ЛНОД C_l матриц A_l и B_l лежит в $S_0(\mathcal{M}_\alpha^{\ n})$, тогда существует α– стабилизатор объекта, являющийся правильной системой.

Доказательство. Из (4) и (5) следует, что

$$A_lB_r = B_lA_r \tag{11}$$

Так как rank A_l=n, то и rank A_r=m. Из (11) получаем для матриц над телом частных кольца R: $A_l^{-1}B_l = B_rA_r^{-1}$. По условию матрица $A_l^{-1}B_l$ – строго правильная. Согласно [7], степени столбцов матриц A_r и B_r удовлетворяют неравенству $cd_i(B_r)< cd_i(A_r)$, i=1,2..m. Рассмотрим равенство (8) как уравнение $ZA_r + YB_r = \Delta_1$. Матрицы A_r и B_r удовлетворяют условиям теоремы из [8]. Возьмём в качестве правой части Δ_1 матрицу, удовлетворяющую условиям теоремы из [8]. Например, можно взять Δ_1 в виде диагональной матрицы с степенями операторов равными $cd_i(A_r)$,+ $\deg(A_l^\beta)$-1. Матрица A_l^β определена в соотношении (3) в [8]. Взяв любое из решений, удовлетворяющее неравенству $d(Y) <d(A_l^\beta)$, в силу теоремы из [8] имеем, что матрица C будет полного ранга и правильной по строкам. Причём rd_i (D) $\le$ rd_i (C)=k, i=1,2...m, где rd_i (Y) - наивысшая степень дифференциальных операторов в i-й строке матрицы. Из [7] следует, что регулятор (2) будет правильной системой и следовательно представим в пространстве состояний [3].

Покажем, что полученный регулятор можно сделать α– стабилизатором, если в качестве Δ_1 взять любой элемент из множества операторных матриц

$$S(\mathcal{M}_\alpha^{\ n}) = \{S\in R^{nxn} \,|\, \forall x\in X^n \ \forall u\in \mathcal{M}_\alpha^{\ n}\, (Sx=u) \Rightarrow x\in \mathcal{M}_\alpha^{\ n}\}\ .$$

соответствующих системам неоднородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений со степенью экспоненциальной устойчивости в терминах вход-выход равной α. Например, можно взять Δ_1 в виде диагональной матрицы с элементами, общий вид которых приведен в работе [9], где получен конструктивный критерий экспоненциальной устойчивости линейного нестационарного дифференциального уравнения в терминах вход-выход.

Теперь регулятор удовлетворяет соотношению (8), в котором $\Delta_1 \in S(\mathcal{M}_\alpha{}^n)$. По условию $C_l \in S_0(\mathcal{M}_\alpha{}^n)$. Из (7) следует, что $\bar{x} \in \mathcal{M}_\alpha$, $\Delta_1 \bar{v} = \Delta_2 \bar{x}$. Используя определение $S(\mathcal{M}_\alpha{}^n)$ и замкнутость $\mathcal{M}_\alpha$ относительно действия операторов из R получим $\bar{v} \in \mathcal{M}_\alpha{}^n$. Согласно (6) имеем $\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ и окончательно получаем $x \in \mathcal{M}_\alpha{}^n$, $v \in \mathcal{M}_\alpha{}^m$.

Ч.Т.Д.

Таким образом, задача синтеза стабилизирующего регулятора сведена к решению дифференциального матричного уравнения с устойчивой правой частью.

ЛНОД C_l определён с точностью до умножения справа на обратимую над R матрицу. Однако, как следует из [10] это не влияет на принадлежность C_l множеству $S_0(\mathcal{M}_\alpha{}^n)$. Поэтому фразу «один из» в предыдущих теоремах можно убрать. Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема. Для α – стабилизируемости строго собственного объекта (1) необходимо и достаточно, чтобы ЛНОД C_l матриц A_l и B_l лежал в множестве $S_0(\mathcal{M}_\alpha{}^n)$.

Выводы. Показано, что необходимым и достаточным условием существования регулятора, обеспечивающего экспоненциальную устойчивость замкнутой линейной нестационарной многосвязной системы, является экспоненциальная устойчивость системы однородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений, соответствующей левому наибольшему общему делителю операторных матриц объекта управления. Задача синтеза стабилизирующего регулятора, представимого в пространстве состояний, сведена к решению матричного операторного уравнения с устойчивой правой частью.

 ISSN 1562-9945

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А, Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. Якубович В.А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления. Обзор // Автоматика и телемеханика. 1984. С. 5-47.
3. Григорьев В.М. Представление систем в пространстве состояний // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Днепропетровск, 2006. - С. 104–112.
4. Blomberg K.J., Ylinen R. Algebraic theory for multivariable linear system. London etc.: Acad. Press, 1983. XX. 260 p.
5. Теория показателей Ляпунова и её приложение к вопросам устойчивости. / Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. М.: Наука, 1966. 576 с.
6. Григорьев В.М. Совместность и эквивалентность линейных нестационарных систем управления // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 6 (35). - Днепропетровск, 2004. - С. 24-32.
7. Григорьев В.М. Правильные операторные матрицы // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 6 (41). - Днепропетровск, 2005. - с. 10–14.
8. Григорьев В.М. Линейные нестационарные дифференциальные матричные операторные уравнения // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 5 (4). – Днепропетровск, 2009. - С. 67-73
9. Григорьев В.М. Критерий устойчивости в терминах вход-выход линейного нестационарного дифференциального уравнения // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 1 (60). - Днепропетровск, 2009. - С. 65-69.
10. Григорьев В.М. Устойчивость линейных систем в операторной форме// Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 2 (10). - Днепропетровск, 2008. - С. 83–88

Получено 20.01.2011г.