

В.С. Хандецький, Ю.О. Тонкошкур

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОВІДНОСТІ ШАРУ ПОРОШКОВОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ БЕЗКОНТАКТНИХ ВИМІРЮВАННЯХ

Анотація. Розроблено математичну модель, яка дозволяє наближено, але в аналітичному вигляді розрахувати еквівалентну електричну провідність шару порошкового матеріалу за результатами безконтактних вимірів у вихоровому магнітному полі. Одержані результати дозволили визначити провідність порошоків MnO , одержаних при різних температурах відпалу.

Ключові слова: математична модель, шар порошкового матеріалу, безконтактні виміри, вихорове магнітне поле, електрична провідність.

Вступ. На теперішній час вимірювання електричної провідності порошоків здійснюють, як правило, контактними методами. Ці методи дають задовільні результати після сильного пресування порошкових матеріалів, коли їх щільність становиться близькою до щільності твердого тіла. Проте ряд порошкових матеріалів використовується при значеннях щільності, близьких до насипних, або збільшених в невеликій ступені під впливом, наприклад, вібрації порошку. Це відноситься до композитних покриттів електродів хімічних джерел струму, покриттів сонячних елементів, різного роду захисних покриттів, тощо. При таких щільностях контактні вимірювання електричної провідності характеризуються значною розбіжністю результатів. Це пояснюється зміненням величини контактних опорів між зернами в об'ємі порошку і на поверхні електродів при змінненні щільності порошкового матеріалу. При вимірюванні електричної провідності порошкових матеріалів безконтактним способом у вихоровому магнітному полі стабільність результатів є значно вищою.

Постановка задачі. В даній роботі поставлена задача розробки математичної моделі для визначення електричної провідності шару порошкового матеріалу змінної товщини за результатами безконтактних вихорострумівих вимірювань і застосування цієї моделі для роз-

рахунку електричної провідності порошку MnO , одержаного при різних температурах відпалу.

Експериментальні дослідження. Експерименти здійснювались на двох модифікаціях порошку MnO , одержаних при температурах відпалу $t_1=250^{\circ}C$ і $t_2=350^{\circ}C$.

Середній розмір гранул порошоків складав 40 мкм. Для досліджень був виготовлена ємність з оргскла, конструкція якої показана на рис.1.

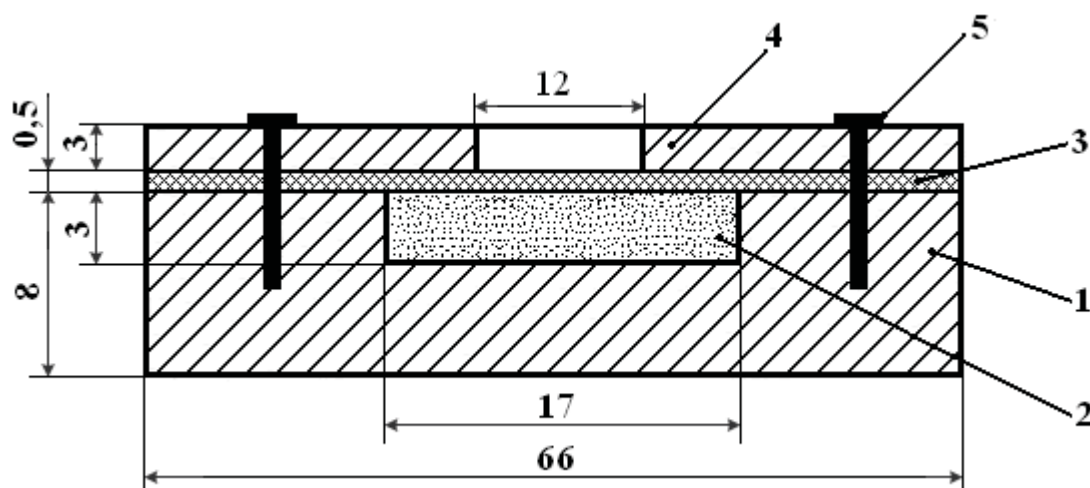


Рисунок 1 - Ємність для дослідження порошку MnO

Корпус ємності 1 містить внутрішній простір циліндричної форми 2, в який засипався порошок. Кількість порошку приблизно на 10% перевищувала його об'єм у внутрішньому просторі 2, після чого порошок ущільнювався мембраною 3 із склотекстоліту. На мембрану накладається пластина з оргскла 4 з вирізом для підводу вихорострумовевого датчика. Пластина притискається до основного корпусу 1 гвинтами 5. Вихорострумовевий датчик являє собою одновиткову котушку індуктивності діаметром $D=8\text{мм}$, діаметр проводу $d_0=1,0\text{мм}$. Вимірювання здійснювались за допомогою приладу Tesla BM-409G в діапазоні частот від 100 до 270 МГц. Дослідження здійснювали для різної товщини шару порошку: $T=3\text{мм}$, 2мм , 1мм . Для цього у внутрішній простір 2 вводили циліндричні пластини з оргскла товщиною відповідно 1 і 2мм.

По одержаним результатам вимірів розраховані відносні величини внесених у вихорострумовевий датчик активного $R_r=R_{ен}/\omega L_0$ і індуктивного $X_r=X_{ен}/\omega L_0$ опорів (ωL_0 – власний індуктивний опір датчика). Слід відзначити, що параметр X_r виявився мало інформатив-

ним. Різні модифікації порошку детерміновано не відрізняються між собою по цьому параметру на частотах діапазону, що досліджується. Графіки залежності R_r від частоти наведені на рис.2.

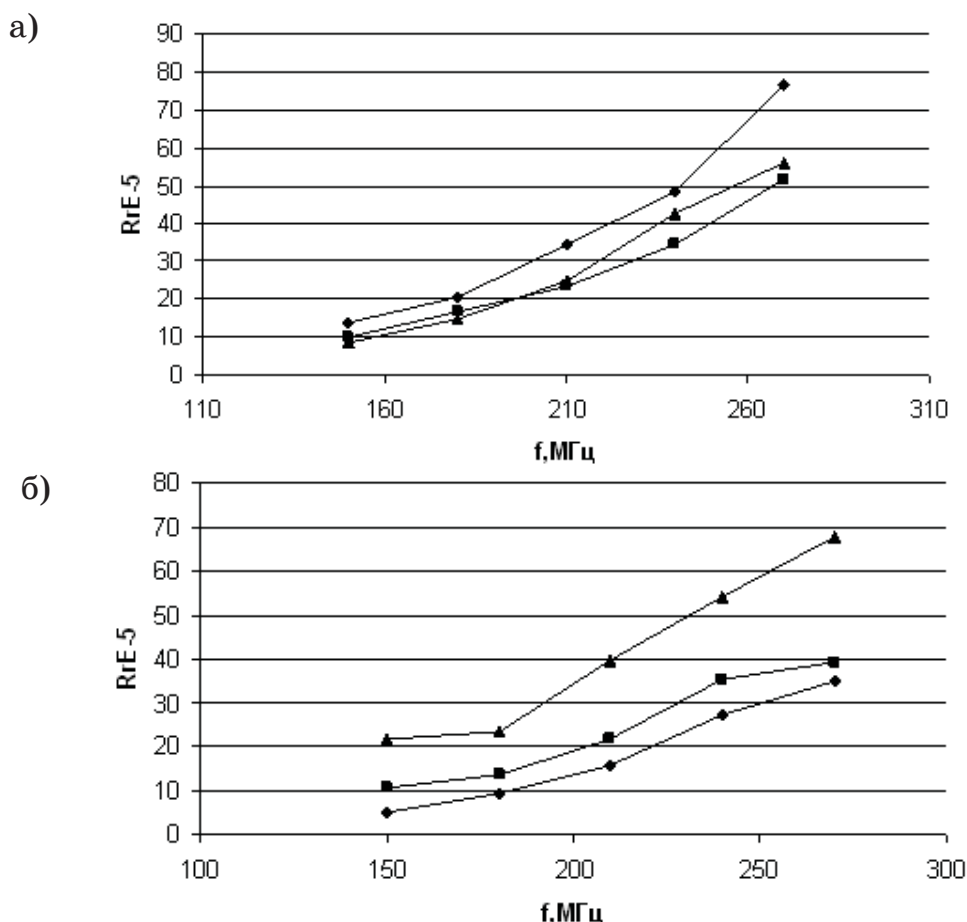


Рисунок 2 - Частотні залежності R_r : а – MnO, одержаний при температурі відпалу $t=250^\circ\text{C}$; б – MnO, одержаний при температурі відпалу $t=350^\circ\text{C}$; ▲ - $T=1\text{мм}$, ■ - $T=2\text{мм}$, ◆ - $T=3\text{мм}$

Теоретичні дослідження. Наближений вираз, що визначає комплексний опір, внесений в накладний вихорострумний перетворювач з вісесиметричним полем неферромагнітною провідною пластиною, має вигляд [1]:

$$Z_{en} = 48 \cdot 10^{-7} \omega R W^2 e^{-\frac{3}{2}\alpha} \beta^2 \cdot \phi(\xi, \beta), \quad (1)$$

де ω - колова частота; R - радіус вихорострумного датчика; W - число витків; $\alpha=2h/R$, де h - величина зазору між робочим торцем вихорострумного датчика й поверхнею матеріалу, що контролюється; $\beta = R\sqrt{\omega\sigma\mu_0}$, узагальнений параметр Ценнека, σ – питома електрична

провідність матеріалу, μ_0 - магнітна постійна; $\xi=2d/R$, де d - товщина пластини. Функція $\phi(\xi, \beta)$ виражається наступним чином:

$$\phi(\xi, \beta) = \frac{th\left(\frac{\xi}{4}\sqrt{9+j\cdot 4\beta^2}\right)}{3\sqrt{9+j\cdot 4\beta^2} + (9+j\cdot 2\beta^2)th\left(\frac{\xi}{4}\sqrt{9+j\cdot 4\beta^2}\right)}. \quad (2)$$

Для малих значень параметра β ($\beta < 0,1$), тобто для слабопровідних матеріалів, вираз (2) можна спростити:

$$\phi(\xi, \beta) = \frac{th\frac{3\xi}{4}}{9(1+th\frac{3\xi}{4})}. \quad (3)$$

У цьому випадку

$$\frac{R_{\text{вн}}}{\omega L_0} = \frac{48}{9L_0} \cdot 10^{-7} \mu_0 R^3 W^2 \cdot \omega \sigma \cdot e^{\frac{3}{2}\alpha} \cdot \frac{th\frac{3\xi}{4}}{9(1+th\frac{3\xi}{4})}, \quad (4)$$

де L_0 - власна індуктивність датчика. В цьому випадку, вимірюючи R_r , ми можемо з формули (4) визначити величину σ . Відповідні розрахунки зроблені для товщини шару порошку MnO $T=3$ мм, одержаного при температурі відпалу $t=250^\circ\text{C}$. В табл.1 приведені ці значення.

Як виходить з табл.1, значення параметру β не є настільки малими, щоб можна було нехтувати їх значеннями в формулі (2). Тому для проведення більш коректних розрахунків потрібно розділити дійсну та уявну частини $\phi(\xi, \beta)$ (2).

Таблиця 1

Значення еквівалентної провідності порошку MnO

f , МГц	σ , См/м	β
150	13,2	0,50
180	16,6	0,62
210	23,8	0,80
240	29,8	0,96
270	42,2	1,21

Позначимо: $z = 9 + j \cdot 4\beta^2$. Тоді, згідно [2]

$$\sqrt{z} = W_k = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\phi_0 + 2k\pi}{2} + j \sin \frac{\phi_0 + 2k\pi}{2} \right), \quad (5)$$

де $k=0, 1$; $\phi_0 = \text{arctg}(4\beta^2 / 9)$.

При цьому $W_0 = \sqrt{|z|} \cdot (\cos \frac{\phi_0}{2} + j \sin \frac{\phi_0}{2})$ називається головним значенням.

$$\text{Позначимо } \phi(\xi, \beta) = P/Q, \text{ де } P = (A \cos \theta - 1) + jA \sin \theta, \quad (6)$$

$$A = e^{\frac{d}{R} \sqrt{|z|} \cos \frac{\phi_0}{2}}, \quad \theta = \frac{d}{R} \sqrt{|z|} \sin \frac{\phi_0}{2}. \quad (7)$$

Розділяючи дійсну та уявну частини в знаменнику (2), одержимо:

$$\text{Re } Q = 3\sqrt{|z|} \cdot A \cos(\frac{\phi_0}{2} + \theta) + 3\sqrt{|z|} \cdot \cos \frac{\phi_0}{2} + 9A \cos \theta - 2A\beta^2 \sin \theta - 9; \quad (8)$$

$$\text{Im } Q = 3\sqrt{|z|} \cdot A \sin(\frac{\phi_0}{2} + \theta) + 3\sqrt{|z|} \cdot \sin \frac{\phi_0}{2} + 9A \sin \theta + 2A\beta^2 \cos \theta - 2\beta^2; \quad (9)$$

$$\text{Тоді } \phi(\xi, \beta) = \frac{(A \cos \theta - 1) + jA \sin \theta}{\text{Re } Q + j \text{Im } Q}. \quad (10)$$

Виключаючи комплексність у знаменнику (10), одержимо

$$\text{Re } \phi(\xi, \beta) = \frac{D}{\text{Re}^2 Q + \text{Im}^2 Q}, \quad (11)$$

$$\text{де } D = 3(A^2 - 1)\sqrt{|z|} \cdot \cos \frac{\phi_0}{2} + 6A\sqrt{|z|} \cdot \sin \frac{\phi_0}{2} \sin \theta - 18A \cos \theta + 9(A^2 + 1), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}^2 Q + \text{Im}^2 Q = & 2A(9|z| - 4\beta^4 - 81) \cos \theta + 54(A^2 - 1)\sqrt{|z|} \cdot \cos \frac{\phi_0}{2} + \\ & + 12(A^2 - 1)\beta^2 \sqrt{|z|} \cdot \sin \frac{\phi_0}{2} + 12A\sqrt{|z|} \cdot \sin \theta \cdot (9 \sin \frac{\phi_0}{2} - 2\beta^2 \cos \frac{\phi_0}{2}) + \\ & + (A^2 + 1)(9|z| + 4\beta^4 + 81); \end{aligned}$$

$$A = e^{\frac{d}{R} \sqrt{|z|} \cos \frac{\phi_0}{2}}, \quad \theta = \frac{d}{R} \sqrt{|z|} \sin \frac{\phi_0}{2}, \quad z = 9 + j \cdot 4\beta^2, \quad |z| = \sqrt{81 + 16\beta^4}, \quad \phi_0 = \arctg \frac{4\beta^4}{9}$$

Розглянемо випадок $\beta < 0$. Для малих β вираз (11) придбає наступний вигляд:

$$\text{Re } \phi = \frac{1}{18} [1 - \exp(-\frac{3}{2} \xi)]. \quad (13)$$

Розрахунок по формулі (13) показує, що при $R=4\text{мм}$ для $d=3\text{мм}$ $\text{Re}\phi=0,0497$, для $d=2\text{мм}$ $\text{Re}\phi=0,0432$, для $d=1\text{мм}$ $\text{Re}\phi=0,0293$. Розрахунок по формулі (3), що одержана безпосередньо з формули (2), дає такі ж значення $\text{Re}\phi$.

В таблиці 2 представлені результати розрахунків $\text{Re}\phi\beta^2$, виконані за формулами (11), (12).

Графіки залежності $\beta^2 \cdot \text{Re}\varphi$ від узагальненого параметру β при різних значеннях ξ представлені на рис.3.

На основі (1) можна записати:

$$R_r = \frac{R_{\text{ен}}}{\omega L_0} = 96\pi \cdot 10^{-7} fRW^2 e^{-\frac{3h}{R}} \cdot \beta^2 \phi(\xi, \beta). \quad (14)$$

Таблиця 2

Значення $\text{Re}\varphi\beta^2$, розраховані згідно (11),(12)

β	ξ			β	ξ		
	0,5	1,0	1,5		0,5	1,0	1,5
0,5	0,00733	0,01078	0,01240	2,0	0,10795	0,13676	0,13828
0,6	0,01055	0,01550	0,01858	2,2	0,12729	0,15116	0,14779
0,7	0,01434	0,02106	0,02419	2,4	0,14328	0,16177	0,15339
0,8	0,01872	0,02744	0,03144	2,6	0,15910	0,16844	0,15582
0,9	0,02366	0,03458	0,03952	2,8	0,17280	0,17150	0,15591
1,0	0,02916	0,04245	0,04832	3,0	0,18395	0,17160	0,15456
1,2	0,04175	0,06001	0,06758	3,5	0,19941	0,16364	0,14854
1,4	0,05629	0,07954	0,08785	4,0	0,19904	0,15138	0,14219
1,6	0,07247	0,09969	0,10744	4,5	0,18838	0,13981	0,13644
1,8	0,08989	0,11922	0,12566	5,0	0,17309	0,13040	0,13095

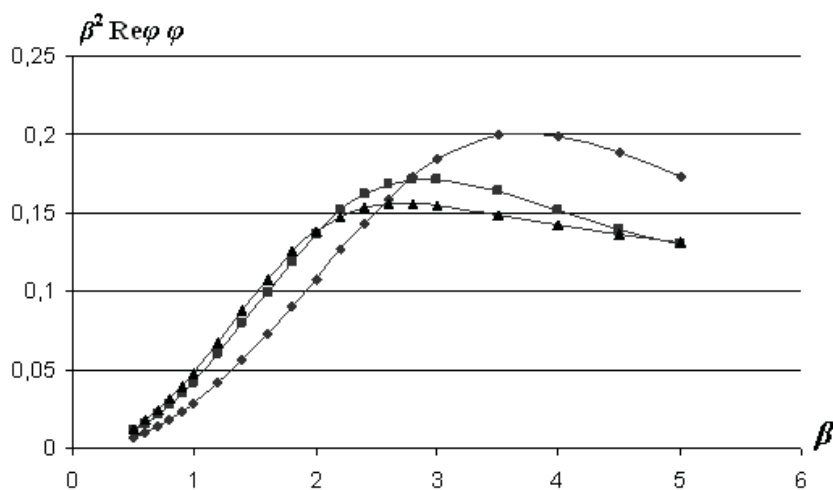


Рисунок 3 - Залежності $\beta^2 \cdot \text{Re}\varphi$ від $\beta = R\sqrt{\omega\sigma\mu_0}$ і $\xi = 2d/R$: \blacktriangle - $\xi=1,5$;
 \blacksquare - $\xi=1,0$; \blacklozenge - $\xi=0,5$

Вимірюючи R_r на фіксованій частоті і визначивши величину усталеного (чи конструктивного зазору) по формулі (14) можна обчислити значення функції $\beta^2 \cdot \text{Re}\varphi$. Користуючись даними табл.2, визначаємо відповідне значення параметру β і відповідне йому значен-

ня питомої електричної провідності σ . Це є електрична провідність гомогенної пластини, товщина якої дорівнює товщині шару порошку, еквівалентної йому за критерієм джоулевих втрат.

Екстремальний характер кривих на рис.3 створює неоднозначність визначення величини β за результатами розрахунку функції β^2 . Реф. Проте, слід відзначити, що порядок розташування кривих в залежності від параметра $\xi = 2d/R$ в доекстремальній і післяекстремальній областях графіків зворотні. Це підтверджується і порядком розташування частотних характеристик на рис.2. Електрична провідність порошку MnO при температурі відпалу $t=250^{\circ}\text{C}$ відповідає доекстремальній, а при $t=350^{\circ}\text{C}$ – післяекстремальній областям залежностей. Відповідні розрахунки показали, що при $f=270\text{МГц}$ і $t=250^{\circ}\text{C}$ $\sigma=94\text{ См/м}$, а при $t=350^{\circ}\text{C}$ $\sigma=260\text{ См/м}$.

Висновки. Розроблено математичну модель, яка дозволяє наближено, але в аналітичному вигляді розрахувати еквівалентну електричну провідність шару порошкового матеріалу за результатами безконтактних вимірів у вихоровому магнітному полі. В якості критерію еквівалентності використовується рівність джоулевих втрат в гранулах порошку і в гомогенній пластині тієї ж товщини, що і шар порошку. Щільність порошку близька до насипної. Одержані результати дозволили розрахувати провідність порошків MnO, одержаних при різних температурах відпалу, і можуть використовуватись для порошкових матеріалів з еквівалентною провідністю від десятих долів См/м до провідності порошків графіту [3,4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Соболев В.С., Шкарлет Ю.М. Накладные и экранные датчики .- Новосибирск: Наука, 1967.-144 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. -М.: Наука, 1986.- 542 с.
3. Redko V.I., Khandetskyu V.S. Non-contact electromagnetic method for determining the conductivity of powdered electrode materials // Mat. of Symp. " Electrochem. of new electrode materials for energy conversion and storage " of the 211th Meeting of the Electrochemical Society, Chicago, Illinois, May 6- 10, 2007, p. 112-116.
4. Redko V.I., Khandetskyu V.S. Method and automatic system for non-contact determination of physical properties of powdered materials // Mat. of ESC Meeting with EuroCVD and SOFC XI – 11 Int. Symp. of Solid Oxide Fuel Cells, Vienna, Austria, Oct.4-9, 2009, p. 178-182.

Отримано 23.01.2011р.