УДК 620.179

А.И. Федорович

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ МАТРИЦ ГАНКЕЛЯ

Аннотация. Исследованы статистические закономерности собственных чисел ганкелевых матриц, сформированных из выборок случайных величин, их чувствительность к изменениям сдвига, масштаба, закона распределения вероятности исходной выборки, содержащей информацию о техническом состоянии объектов контроля.

Ключевые слова: ганкелева матрица, собственные числа, выборка измерений, мощность.

Постановка задачи

В задачах неразрушающего контроля линейно-протяженных объектов со случайными параметрами информация об их состоянии содержится в выборках измерений, искаженных помехами разного вида. Одним из способов уменьшения влияния помех на результаты контроля является формирование матриц Ганкеля и их сингулярно-спектральный анализ [1]. В реальных условиях контроля выборки измерений представляют собой последовательности случайных величин с неизвестными статистическими закономерностями. В задачах сингуляно-спектрального анализа собственные числа матриц занимают особое место и зависят от статистически закономерностей исходных выборок случайных величин, их параметров, законов распределения вероятностей, корреляционных связей. Собственные числа являются случайными величинами. Цель исследования – изучить статистику собственных чисел, законы распределения и зависимости их от параметров и законов распределения исходных выборок измерений.

Сингулярно-спектральный анализ ганкелевых матриц используется для уменьшения влияния помех путем отбора собственных чисел и формирования сглаженных выборок измерений. Статистические закономерности собственных чисел неизвестны и аналитическими методами их трудно исследовать. Эта задача может быть решена путем проведения вычислительных экспериментов на основе моделей выборок с различными законами распределения.

Компьютерная модель и методика вычислительных экспериментов

Разработанная для проведения исследований компьютерная модель состоит из четырех блоков: 1) блок из четырех генераторов для формирования выборок случайных величин *x(k)* с законами распределения вероятностей – Гаусса (независимых и коррелированных) и Лапласа, экспоненциального и релеевского (независимых случайных величин); 2) блок формирования матриц Ганкеля; 3) блок вычисления собственных чисел матрицы λ_i; 4) блок статистического анализа собственных числе как случайных величин и оценки их параметров.

Для сравнения результатов статистического анализа собственных чисел матриц Ганкеля с различными законами распределения вероятностей выборок случайных величин, в качестве изменяемого параметра выбрана их мощность (математическое ожидание квадрата случайных величин). Для используемых законов распределения мощность запишется в виде $P = M^2[x] + D[x] = M^2[x]\left(1 + \frac{D[x]}{M^2[x]}\right)$. Так как для релеевских и экспоненциальных случайных величин $P = 2\mu^2$ и $P = 2b^2$, где μ и b параметры этих законов и $\frac{P[x]}{M^2[x]} = 1$, то для нормальных и лапласовских случайных величин выберем это отношение равным 1, и тогда $P = 2a^2$. Коррелированные нормальные случайные величины описываются моделью Маркова

$$S(k) = rS(k-1) + \sigma^2\sqrt{1-r^2}\,\xi(k) \qquad (2)$$

где r - коэффициент корреляции; $\xi(k)$ - нормальные случайные величины с нулевым математическим ожидание и единичной дисперсией.

 ISSN 1562-9945

Из последовательности $x(1), x(2), ..., x(N)$ формируется матрица Ганкеля (с длиной окна L) $|X| = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{K-1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_K \\ x_3 & x_4 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_{N-1} \end{pmatrix}$. Величины L, N и K, связаны между собой следующим соотношением $K = N - L + 1$. Запишем уравнение для оценки собственных чисел

$$det\left(|X||X|^T - \lambda|I|\right) = 0. \qquad (3)$$

Решая уравнения (3), получим корни λ_i - собственные числа матрицы $|S| = |X||X|^T$. Установлено, что собственные числа ганкелевых матриц образуют неубывающий ряд $\lambda_1 \geq ...\lambda_L \geq 0$, где L- длина окна. Для проведения вычислительных экспериментов выбрано L=5.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

Для статистического анализа собственных чисел как случайных величин были проведены вычислительные эксперименты по 10000 реализаций для каждого исследуемого случая. При обработки полученных результатов выполняется нормировка собственных чисел исследуемой матрицы $\frac{\lambda_i}{N}$, где N (N=25) - длина исходной выборки случайных величин.

Поскольку собственные числа ганкелевой матрицы являются случайными величинами с неизвестными законами распределения вероятностей и неизвестными параметрами, то по результатам вычислительных экспериментов построены их гистограммы. Гистограмма максимального собственного числа приведена на рис. 1. По критерию хи-квадрат проведена оценка вида закона распределения вероятности. Гистограмма рис.1 описывается гамма-распределением с параметрами $\alpha = 5$, $\beta = 1,6$ (исходная выборка нормальные случайные величины с $a = 0$, $\sigma = 1$).

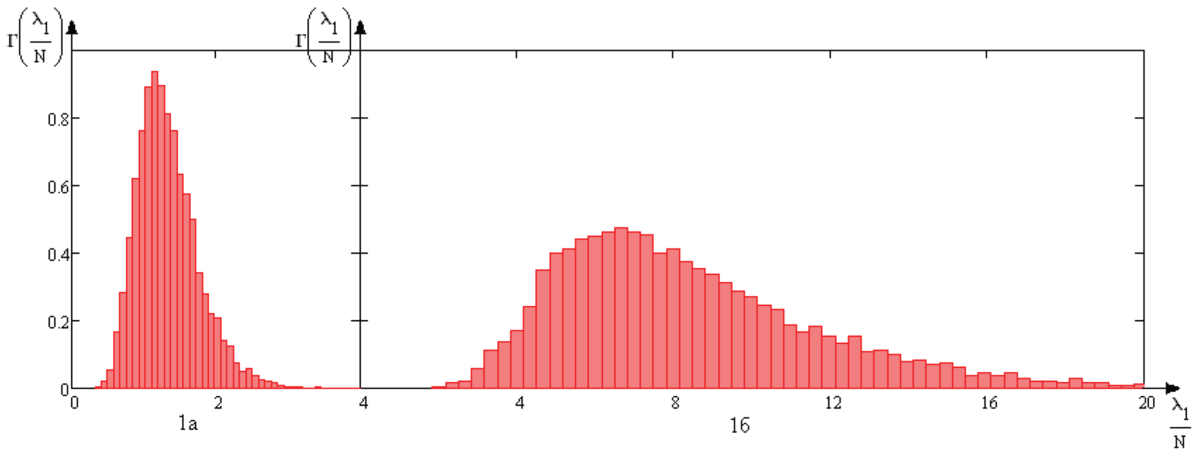

Рисунок 1 - Гистограмма максимального собственного числа ганкелевой матрицы

Закон распределения вероятности собственных чисел остается неизменным для различных исходных выборок, изменяются только его параметры. На рис. 1б представлена гистограмма λ_1/N для нормальных случайных величин с $a = 1$, $\sigma = 2$. В результате вычислительных экспериментов установлено, что параметры гамма-распределения собственных числе связаны с параметрами исходной выборки следующими закономерностями: $\alpha^* = 1,5P - 1$ и $\beta^* = 0,02P$ (P-мощность)для симметричных законов распределения и $\alpha^* = 5,5P - 2$ и $\beta^* = 0,015P$ - для асимметричных законов.

При любых исходных данных первое (максимальное) собственное число значительно превышает остальные. В таблице 1 приведены значения собственных чисел для различных законов распределения вероятностей при одинаковой мощности $P = 2$.

Таблица 1

	Нормальный ЗРВ	Лапласа ЗРВ	Экспоненциальный ЗРВ	Релея ЗРВ
$\overline{\lambda}_1$	138,63	179,243	207,55	151,495
$\overline{\lambda}_2$	30,761	69,32	15,557	35,458
$\overline{\lambda}_3$	23,716	55,682	12,086	28,247
$\overline{\lambda}_4$	18,393	40,573	8,719	20, 571
$\overline{\lambda}_5$	13,618	30,889	6,62	15,833

 ISSN 1562-9945

Рассмотрим только максимальное собственное число λ_1. На рис. 2 представлены кривые λ_1 для различных законов распределения вероятностей при изменении мощности.

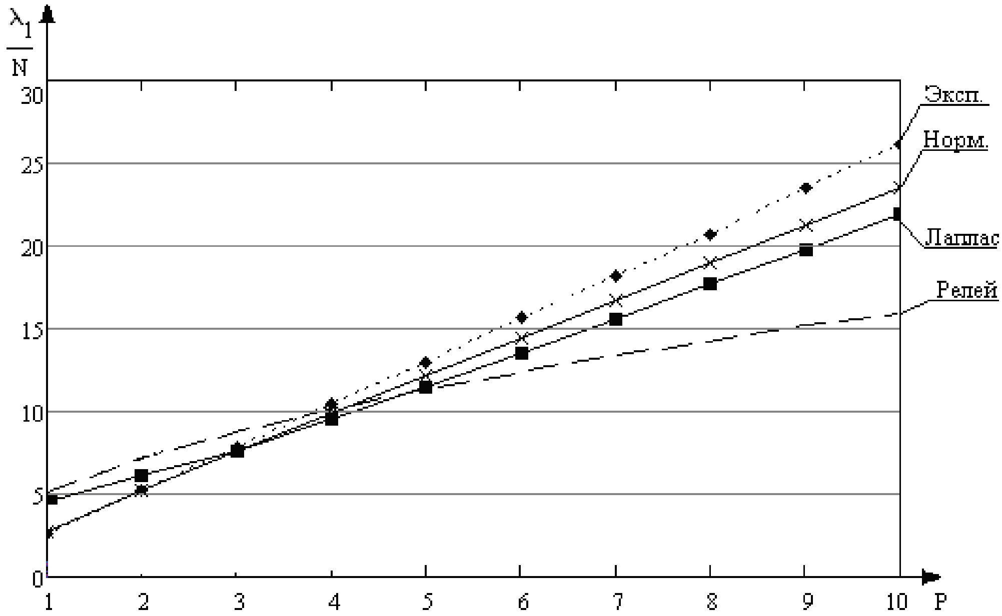

Рисунок 2 – Кривые нормированных λ_1 для различных законов распределения вероятностей

Из рис.2 видно, что характер кривой изменения собственного числа почти не зависит от вида закона распределения вероятности исходной выборки случайных величин. При изменении мощности в 10 раз значение λ_1 для нормальных случайных величин изменилось в 6 раз (от 4 до 24); для лапласовских случайных величин – в 4 раза (от 5 до 21); для экспоненциальных – в 6 раз (от 4 до 26); для релеевских случайных величин – в 3 раза (от 5 до 16).

В случае, когда исходная выборка представляет собой коррелированные случайные величины (марковская последовательность), изменение величины коэффициента корреляции приводит к увеличению λ_1, а остальные собственные числа уменьшаются, если значения коэффициента корреляции превышает 0.5 (рис.3.).

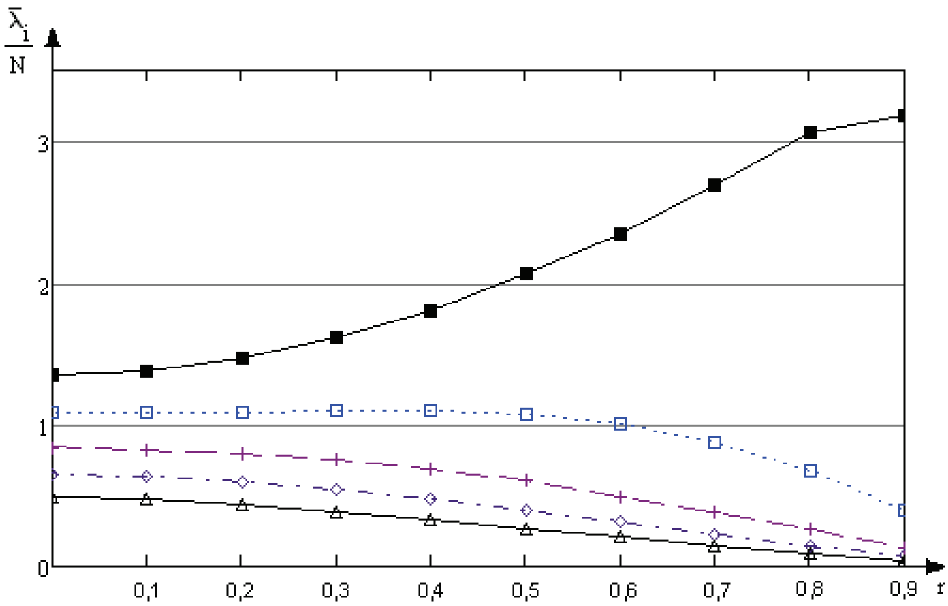

Рисунок 3 – Характер изменения собственных чисел при увеличении коэффициента корреляции

Для нормированных значений собственных чисел (полученных по выборке нормальных случайных величин с параметрами $a=0$, $\sigma=1$) при увеличении коэффициента корреляции от 0 до 0.9 максимальное собственное число увеличивается в 1,5 раза, тогда как при изменении мощности – в 6 раз. Что говорит о более высокой чувствительности собственных чисел ганкелевой матрицы к изменениям сдвига и масштаба исходной выборки измерений, чем к корреляции этих величин.

Выводы

1. Собственные числа ганкелевой матрицы, сформированной по выборке случайных величин, являются случайными числами, и образуют неубывающий ряд, в котором первое собственное число значительно превышает остальные.

2. Моделью статистических закономерностей собственных чисел может служить закон гамма распределение с параметрами $\alpha^* = 1,5P - 1$ и $\beta^* = 0,02P$ для симметричных законов распределения и $\alpha^* = 5,5P - 2$ и $\beta^* = 0,015P$ - для асимметричных законов.

3. Изменение закона распределения вероятности или его параметров исходной выборки оказывает влияние только на

 ISSN 1562-9945

максимальное значение собственного числа. Остальные собственные числа практически не изменяются.

4. Изменения сдвига и масштаба исходных выборок случайных величин приводят к изменению максимального собственного числа матриц Ганкеля в 4-6 раз (зависимо от вида закона распределения вероятностей исходной выборки). Увеличение коэффициента корреляции – в 2 раз, что значительно меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голядина Н.Э. Метод «Гусеница» - SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. - СПб., 2004. – 76с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика/ А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2006. – 816 с.

Получено 30.09.2010г.