

УДК 539.3

И.Ю. Наумова

**К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН В
ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**

Аннотация. Выполнено построение уравнений уточненной теории, приемлемой для решения контактных задач по лицевым поверхностям, пластин, находящихся в стационарном температурном поле. На основе предложенных уравнений рассмотрена деформация негладкой пластины, зажатой между плоскими штампами в температурном поле. Исследован симметричный процесс, при котором сначала пластина была обжата штампами, а затем температурное поле изменялось, оставаясь постоянным по толщине и ширине пластины.

Введение. Интерес к проблеме механического взаимодействия пластин по лицевым поверхностям в температурном поле вызван расширением области применения тонкостенных конструкций в инженерной практике. Решение таких задач в постановке теории упругости связано с применением прямых численных методов. При этом из-за больших градиентов в контактных напряжениях в окрестности границ области контакта возникают трудности при численной реализации. Решение в постановке классических теорий пластин можно найти только в классе обобщенных функций, сингулярная часть которых распределена по границе области контакта. В имеющихся уточненных теориях с учетом сдвига и обжатия [1], [2] нет учета температурного фактора. Таким образом, задача построения уточненной теории пластин, пригодной для решения контактных задач с учетом температурного фактора и сочетающей простоту прикладных теорий с достаточной точностью, является актуальной.

В данной работе обобщенная теория пластин, приемлемая в контактных задачах по лицевым поверхностям построена полуобратным методом. При этом было использовано обобщение рейснеровской теории А.Л. Гольденвейзером. В отличие от последней, соотношения упругости выведены не из вариационного принципа, а путем осреднения соотношений упругости с произвольным весом.

© Наумова И.Ю., 2010

Полученные уравнения применены к решению одномерной контактной задачи о взаимодействии полосы, находящейся в температурном поле, со сжимающими ее штампами.

Построение уравнений обобщенной теории пластин, находящихся в температурном поле. Изотропную пластину, находящуюся в температурном поле, толщины h будем рассматривать в постановке теории упругости с учетом краевых условий на лицевых поверхностях. Предполагается, что температура изменяется в таких пределах, при которых коэффициенты упругости не меняются, удлинения пропорциональны температуре и по всем направлениям одинаковы, а, следовательно, угловые деформации при нагревании элементарного объема равны нулю. Будем рассматривать установившийся температурный процесс (изменение температуры t - известная функция от координат, которая не изменяется по толщине пластины).

В специальной ортогональной криволинейной системе координат $\tilde{\vartheta}_1 = h \cdot \vartheta_1$; $\tilde{\vartheta}_2 = h \cdot \vartheta_2$; $\tilde{z} = h \cdot x_3$ [3] имеем:

$$\begin{aligned} & \text{- уравнения равновесия при отсутствии массовых нагрузок} \\ & \vec{\nabla} \tau + \partial_3 \vec{\sigma}_3 = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_3 + \partial_3 \sigma_{33} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

- прямую форму закона Гука (уравнения Дюгамеля – Неймана) с учетом соотношений Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon = def \vec{u}_\tau &= \frac{1}{2 \cdot G} \tau - \frac{\nu}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot G} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \mathbf{E} + \alpha \cdot t \mathbf{E}; \\ \vec{\varepsilon}_3 &= \vec{\nabla} u_3 + \partial_3 \vec{u}_\tau = \frac{1}{G} \vec{\sigma}_3; \\ \varepsilon_{33} = \partial_3 u_3 &= \frac{1}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot G} (\sigma_{33} - \nu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22})) + \alpha \cdot t; \end{aligned} \quad (2)$$

- условия на лицевых поверхностях $x_3 = \frac{j}{2}$, $j = \pm 1$, в области $S_q^{(j)}$, где задана нагрузка $q_n^{(j)} = q_n^{(j)}(\vartheta_1, \vartheta_2)$, и в области $S_u^{(j)}$, где заданы перемещения $\tilde{u}_n^{(j)} = h \cdot u_n^{(j)}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ определим формулами

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_3 \left(\vartheta_1, \vartheta_2, \frac{j}{2} \right) &= j \cdot \vec{q}_\tau^{(j)}(\vartheta_1, \vartheta_2); \quad \sigma_{33} \left(\vartheta_1, \vartheta_2, \frac{j}{2} \right) = j \cdot q_3^{(j)}(\vartheta_1, \vartheta_2); \\ (\vartheta_1, \vartheta_2) &\in S_q^{(j)}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\tau \left(\vartheta_1, \vartheta_2, \frac{j}{2} \right) &= j \cdot \bar{u}_\tau^{(j)} (\vartheta_1, \vartheta_2); & u_3 \left(\vartheta_1, \vartheta_2, \frac{j}{2} \right) &= j \cdot u_3^{(j)} (\vartheta_1, \vartheta_2); \\ (\vartheta_1, \vartheta_2) &\in S_u^{(j)}. \end{aligned} \quad (4)$$

В этих соотношениях $\bar{u}_\tau = u_k \cdot \bar{e}_k$ - двухкомпонентный вектор перемещений; $\tau = \sigma_{km} \cdot \bar{e}_k \cdot \bar{e}_m$ - симметричный четырехкомпонентный тензор напряжений; $\varepsilon = \varepsilon_{km} \cdot \bar{e}_k \cdot \bar{e}_m$ - симметричный четырехкомпонентный тензор деформаций; $\bar{\sigma}_3 = u_k \cdot \bar{e}_k$, $\bar{\varepsilon}_3 = \varepsilon_k \cdot \bar{e}_k$ - вектора касательных напряжений и деформаций на площадках с нормалью $\bar{e}_3 = \bar{k}_3$; $\bar{q}_\tau^{(j)} = q_k^{(j)} \cdot \bar{e}_k$ - двухкомпонентный вектор касательной нагрузки на лицевой поверхности пластины; $\bar{u}_\tau^{(j)} = u_k^{(j)} \cdot \bar{e}_k$ - вектор перемещений точек лицевой поверхности пластины; по индексам $k, m = 1, 2$ подразумевается суммирование; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{k}_3$ - ортонормированные базисные вектора; $\bar{\nabla} = \bar{e}_k \partial_k$ - оператор Гамильтона; $def \bar{u}_\tau = \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}_\tau + (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}_\tau)^T \right)$; $(\dots)^T$ - оператор транспонирования, E - единичный четырехкомпонентный тензор, действие оператора $\bar{\nabla}$ определяется известными правилами [4]; $\sigma_{sn} = \sigma_{sn}(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3)$, $\varepsilon_{sn} = \varepsilon_{sn}(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3)$, $\tilde{u}_n = h \cdot u_n(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3)$ - компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и вектора перемещений соответственно; $s = 1, 2, 3$; $\partial_k = \frac{1}{H_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_k}$; $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$; $k_{km} = \frac{1}{H_k \cdot H_m} \cdot \frac{\partial H_m}{\partial \vartheta_k}$, ($k \neq m$) - отличные от нуля кривизны координатных поверхностей; H_k - коэффициенты Ламе в системе $(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3)$; G, ν - модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно; α - коэффициент температурного расширения материала.

Начинаем осреднение уравнений теории упругости (1) – (4), как обычно, с введения обобщенных усилий по известному правилу

$$T(\vartheta_1, \vartheta_2) = T_{(km)}(\vartheta_1, \vartheta_2) \bar{e}_1 \bar{e}_2 = \left\| \begin{matrix} T_{km}(\vartheta_1, \vartheta_2) \\ M_{km}(\vartheta_1, \vartheta_2) \end{matrix} \right\| = \int_{-1/2}^{1/2} \left\| \mathbf{1} \right\| \tau(\vartheta_1, \vartheta_2, x) dx;$$

$$\bar{T}_3(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \bar{\sigma}_3(\vartheta_1, \vartheta_2, x) dx, \quad (5)$$

где: $\mathbf{T}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ - четырехкомпонентный симметричный тензор обобщенных сил, компоненты которого $T_{(km)}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ - матрицы столбцы второго порядка; $k, m = 1, 2$; $\bar{T}_3(\vartheta_1, \vartheta_2)$ - вектор касательных усилий в плоскости пластины.

Пользуясь этими определениями (5), непосредственно из уравнений (1) с учетом условий (3) получаем уравнения равновесия пластины в форме

$$\bar{\nabla} \mathbf{T} - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \bar{T}_3 + \begin{vmatrix} |i| \\ i/2 \end{vmatrix} \bar{q}_\tau^{(i)} = \mathbf{0}; \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{T}_3 + |i| q_3^{(i)} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем индекс i принимает значения ± 1 и является индексом суммирования.

Основные напряжения $\tau = \sigma_{km} \cdot \bar{e}_k \cdot \bar{e}_m$, ($k, m = 1, 2$), аналогично тому, как это было предложено для случая только изгиба А.Л.Гольденвейзером, представлены в виде

$$\tau(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3) = \ddot{Z}(x_3) \cdot \mathbf{T}(\vartheta_1, \vartheta_2), \quad (7)$$

где $Z(x_3) = \begin{vmatrix} Z_1(x_3) & Z_2(x_3) \end{vmatrix}$ - матрица-строка произвольных функций, точки над произвольными функциями $Z_k(x_3)$ обозначают производные по поперечной координате x_3 .

Выражения остальных компонент напряжений получим путем интегрирования уравнений равновесия (1) по переменной x_3 с учетом условий (3). Используя представление (7), а также и выражения $\bar{\nabla} \mathbf{T}$ и $\bar{\nabla} \cdot \bar{T}_3$ из уравнений равновесия (6) находим

$$\bar{\sigma}_3(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3) = -\dot{Z}_2(x_3) \cdot \bar{T}_3 + \dot{Z}_1(x_3) \cdot \bar{q}_\tau^{(i)}; \quad (8)$$

$$\sigma_{33}(\vartheta_1, \vartheta_2, x_3) = -Z_2^{(i)}(x_3) \cdot q_3^{(i)} - Z_1^{(i)}(x_3) \bar{\nabla} \cdot \bar{q}_\tau^{(i)}, \quad (9)$$

где обозначено

$$Z^{(i)}(x_3) = \begin{vmatrix} Z_1^{(i)}(x_3) & Z_2^{(i)}(x_3) \end{vmatrix} = Z(x_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ i/2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 + 1/2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \delta_{i,-1};$$

$$\delta_{i,-1} = \frac{1-i}{2}. \quad (10)$$

Обобщенные перемещения (средние по толщине пластины перемещения $V_k = V_k(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ и углы поворотов $\gamma_k = \gamma_k(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$) в отличие от известных способов [1], [2] вводим следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{V}_{(\tau)}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega(x) \bar{u}_{\tau}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, x) dx = V_{(k)}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \cdot \bar{e}_k; \\ V_{(k)}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) &= \left\| \begin{array}{l} V_k(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \\ \gamma_k(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \end{array} \right\|; \\ V_3(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) &= - \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2(x) u_3(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, x) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\omega(x_3)$ - матрица - столбец произвольных функций $\omega_1(x_3), \omega_2(x_3)$, не связанная с матрицей функций $Z(x_3)$. Точки над $\omega(x_3)$ означают производные по x_3 .

Осредняя закон Дюгамеля - Неймана (2) с весами $\omega(x_3)$ и их производными с учетом соотношений (3), (6), (7), (8), (9), (11) получаем

- соотношения упругости

$$\begin{aligned} def \vec{V}_{(\tau)} &= \frac{b_{(1)}}{2G} \mathbf{T} - \frac{\nu}{2(1+\nu)G} \left(b_{(1)} \cdot T_{(0)} + \pi_{(1)}^{(i)} \cdot \left\| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \bar{q}_{\tau}^{(i)} \\ q_3^{(i)} \end{array} \right\| \right) \mathbf{E} + \omega\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \alpha \cdot t \mathbf{E} \\ \vec{\nabla} V_3 + \|\mathbf{1} \ 0\| \cdot \vec{V}_{(\tau)} &= \frac{b}{G} \bar{T}_3 - \frac{1}{G} \pi_3^{(i)} \bar{q}_{\tau}^{(i)}; \quad T_{(0)} = T_{(11)} + T_{(22)}, \end{aligned} \quad (12)$$

- соотношения, связывающие перемещения точек лицевых поверхностей с обобщенными усилиями и перемещениями, а также нагрузками на лицевых поверхностях (соотношения контакта)

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\tau}^{(j)} &= \left\| \mathbf{1} \ \frac{j}{2} \right\| \cdot \vec{V}_{(\tau)} + \frac{\nu \cdot \alpha_{(1k)}^{(j)}}{2(1+\nu)G} \vec{\nabla} T_{(0)} - \frac{\alpha_{13}^{(j)}}{G} \bar{T}_3 + \frac{\lambda_1^{(j,i)}}{G} \bar{q}_{\tau}^{(i)} - \\ &\frac{\lambda_{(1k)}^{(j,i)}}{2(1+\nu)G} \vec{\nabla} \left\| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \bar{q}_{\tau}^{(i)} \\ q_3^{(i)} \end{array} \right\| + \lambda_{\tau}^{(j)} \alpha \bar{\nabla} t; \end{aligned}$$

$$u_3^{(j)} = V_3 - \frac{\nu \cdot \alpha_{(3k)}^{(j)}}{2(1+\nu)G} T^{(0)} + \frac{\lambda_{(3k)}^{(j,i)}}{2(1+\nu)G} \left\| \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r^{(i)}}{q_3^{(i)}} \right\| - \lambda_n^{(j)} \alpha t. \quad (13)$$

Замкнутая система уравнений (6), (12), (13) определяет обобщенную теорию пластин. Уравнения (12), (13) по форме совпадают с уравнениями, приведенными в [2]. Отличие состоит в наличии членов, содержащих изменение температуры t и произвольности коэффициентов, поскольку они выражаются через матрицы произвольных функций $\omega_i(x_3)$ и $Z_i(x_3)$ по формулам

$$\begin{aligned} b_{(1)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega(x) \cdot \ddot{Z}(x) dx; & b &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2(x) \cdot \dot{Z}_2(x) dx; \\ \pi_3^{(i)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2(x) \cdot \dot{Z}_1^{(i)}(x) dx; & \pi_{(1)}^{(i)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega(x) \cdot \left\| Z_1^{(i)}(x) \quad Z_2^{(i)}(x) \right\| dx; \\ \alpha_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1(x) \cdot \dot{Z}_1(x) dx; & \alpha_{(1)}^{(j)} &= - \int_{-1/2}^{1/2} \omega^{(j)}(x) \cdot \ddot{Z}^{(i)}(x) dx; \\ \lambda_{(1)}^{(j)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega^{(j)}(x) \cdot Z^{(i)}(x) dx; & \lambda_r^{(j)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1^{(j)}(x) dx; \\ \lambda_1^{(j,i)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1^{(j)}(x) \cdot \dot{Z}_1^{(i)}(x) dx; & \lambda_n^{(j)} &= \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2^{(j)}(x) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

На основании тождественности выполнимости теоремы Бетти и условий инвариантности уравнений теории пластин по отношению к выбору системы координат доказано, что все коэффициенты уравнений теории выражаются через восемь независимых констант

$$a_{11}; a_{22}; \beta_{11}; \beta_{22}; c_{11}; c_{22}; m_{12}; m_{21}, \quad (15)$$

какими бы ни были функции $\omega_i(x_3)$, $Z_i(x_3)$, следующим образом

$$b_{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{array} \right\|; \pi_{(1)}^{(i)} = \left\| \begin{array}{cc} \beta_{11} - \frac{1}{4} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2}(\beta_{22} - 1) & \beta_{22} \end{array} \right\|;$$

$$\lambda_{(1)}^{(j,i)} = \left\| \begin{array}{cc} c_{11} + \frac{m_{12}}{2} + \frac{ji}{4} \left(c_{22} + 2m_{21} + \frac{1}{12} \right) & \frac{j}{2} (c_{22} + m_{21}) + \frac{i}{2} m_{12} \\ \frac{i}{2} (c_{22} + m_{21}) + \frac{j}{2} m_{12} & c_{22} + \frac{ji}{4} \end{array} \right\|;$$

$$b = \beta_{22}; \pi_3^{(i)} = \pi_{31}^{(i)} = \frac{i}{2} (\beta_{22} - 1); \alpha_1^{(j)} = \pi_3^{(j)} = \alpha_{13}^{(j)} = \frac{j}{2} (\beta_{22} - 1); \alpha_{(1)}^{(j)} = \pi_{(1)}^{(j)T};$$

$$\lambda_1^{(j,i)} = \beta_{11} - \frac{1}{4} + \frac{ij}{4} (\beta_{22} - 1); \lambda_r^{(j)} = -m_{12}; \lambda_n^{(j)} = -\frac{j}{2}. \quad (16)$$

Восемь независимых констант связаны с функциями $\omega_i(x_3)$, $Z_i(x_3)$ формулами

$$a_{11} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1(x) \cdot \ddot{Z}_1(x) dx; \quad a_{22} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2(x) \cdot \ddot{Z}_2(x) dx;$$

$$\beta_{11} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1(x) \cdot \dot{Z}_1(x) dx; \quad \beta_{22} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2(x) \cdot \dot{Z}_2(x) dx;$$

$$c_{11} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1(x) \cdot Z_1(x) dx - \frac{1}{12}; \quad c_{22} = \int_{-1/2}^{1/2} \omega_2(x) \cdot Z_2(x) dx - \frac{1}{4};$$

$$m_{12} = - \int_{-1/2}^{1/2} Z_1(x) dx + \frac{1}{4} = - \int_{-1/2}^{1/2} \omega_1(x) dx + \frac{1}{4};$$

$$m_{21} = \int_{-1/2}^{1/2} x Z_2(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} x \omega_2(x) dx. \quad (17)$$

Справедливо и обратное утверждение: если назначить константы (15), то из уравнений (14), (16) можно определить функции $\omega_i(x_3)$, $Z_i(x_3)$ с точностью до полиномов пятого и седьмого порядков соответственно.

Таким образом, вопрос построения обобщенной теории пластин сводится к выработке критерия для определения указанных восьми констант.

Для установления критерия определения констант в контактных задачах система уравнений (6), (12), (13) приводится к дифференциальным соотношениям относительно нагрузки на лицевых поверхностях путем исключения переменных состояния из

контактных соотношений. Эта система разделена на два независимые вида:

$$\left(\Lambda_{(1)}^{(j,i)} \Delta^2 - 2B_{(1)}^{(j,i)} \Delta + A_{(1)}^{(j,i)} \right) \left\| \begin{array}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_\tau^{(i)} \\ q_3^{(i)} \end{array} \right\| = \frac{2G}{1-\nu} \nabla \left(\left\| \begin{array}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\tau^{(i)} \\ u_3^{(i)} \end{array} \right\| - \left(D_{(1)}^{(j)} \Delta - \left\| \begin{array}{c} \mathbf{1} + \nu \\ \mathbf{0} \end{array} \right\| \right) \cdot \alpha \cdot t \right), \quad (18)$$

$$\left(\Lambda_2^{(j,i)} \Delta^2 - 2B_2^{(j,i)} \Delta + A_2^{(j,i)} \right) (\vec{\nabla} \times \vec{q}_\tau^{(i)}) \cdot \vec{k}_3 = G \left(\Delta - \frac{a_{22}}{\beta_{22}} \right) \Delta (\vec{\nabla} \times \vec{u}_\tau^{(j)}) \cdot \vec{k}_3, \quad (19)$$

коэффициенты которых $\Lambda_{(1)}^{(j,i)}, \Lambda_2^{(j,i)}, B_{(1)}^{(j,i)}, B_2^{(j,i)}, A_{(1)}^{(j,i)}, A_2^{(j,i)}, D_{(1)}^{(j)}$ определенным образом выражаются через константы.

Если задать на j -ой лицевой поверхности перемещения $\vec{u}_\tau^{(j)}, u_3^{(j)}$, то нагрузку $\vec{q}_\tau^{(j)}, q_3^{(j)}$ на этой стороне $i = j$ следует рассматривать как контактное взаимодействие, а соотношения (18), (19) – как дифференциальные уравнения относительно этого взаимодействия.

Для негладкой нагрузки использовалось условие непередачи разрывов в нагрузке в контактное взаимодействие. Это условие будет выполнено, если потребовать, чтобы порядок дифференциальных уравнений (18), (19) относительно контактного взаимодействия был бы выше порядка относительно нагрузки, то есть, наложить условие

$$\Lambda_{(1)}^{(j,-j)} = 0; \quad \Lambda_2^{(j,-j)} = 0. \quad (20)$$

Первое из условий (20) накладывает связи на константы, в результате чего для системы (18) из восьми независимых констант остается только пять. Аналогично, второе из условий (20) накладывает еще одну связь и для уравнения (19) из четырех входящих в него независимых констант $a_{11}, a_{22}, \beta_{11}, \beta_{22}$ остается – три. Для определения остальных констант использовалось условие минимизации невязки операторных выражений перемещений в области контакта по теории пластин и теории упругости. В результате такого подхода были получены следующие значения независимых констант:

$$\begin{aligned} a_{11} = 1; \quad a_{22} = 12; \quad \beta_{11} = 0,337; \quad \beta_{22} = 1,096; \quad c_{11} = -0,042 + 0,058\nu^2; \\ c_{22} = 0,25 + 0,15 \cdot \nu^2; \quad m_{12} = 0,115 - 0,028 \cdot \nu^2; \quad m_{21} = -0,135 + 0,044 \cdot \nu^2 \end{aligned} \quad (21)$$

и коэффициентов

$$\Lambda_{11}^{(j,j)} = 0,0315; \Lambda_{13}^{(j,j)} = \Lambda_{31}^{(j,j)} 0,115j; \Lambda_{33}^{(j,j)} = 0,5, \Lambda_{(1)}^{(j,-j)} = 0. \quad (22)$$

Полученные значения коэффициентов (22) совпадают со значениями этих коэффициентов, приведенными в работе [5].

Применение полученных уравнений к решению одномерных контактных задач. Уравнения обобщенной теории пластин (6), (15) и контактные соотношения (16) при одномерном состоянии ($\partial_2(\dots) = 0$) разделяются на уравнения и соотношения контакта первого состояния относительно переменных $V_{(1)}; V_3; T_{(11)}; T_{(22)}; T_{13}; u_1^{(j)}; u_3^{(j)}$ и на уравнения и соотношения контакта второго состояния относительно переменных $V_{(2)}; T_{(12)}; T_{23}; u_2^{(j)}$. Плоская деформация пластины (растяжение – сжатие с изгибом) описывается уравнениями первого состояния в декартовых координатах $\mathcal{G}_1 = x, x_3$, $H_i = 1 (i = 1,2), k_{12} = 0$.

В качестве примера рассмотрим деформацию негладкой пластины в температурном поле (изменение температуры t) толщины h и ширины $2l$, зажатой между плоскими штампами так, что заданы их поступательные перемещения W (рис. 1). Исследуем следующий симметричный процесс: пусть сначала пластина была обжата штампами путем задания их поступательного перемещения $\pm W$, а затем температурное поле t изменялось, оставаясь постоянным по толщине и ширине пластины.

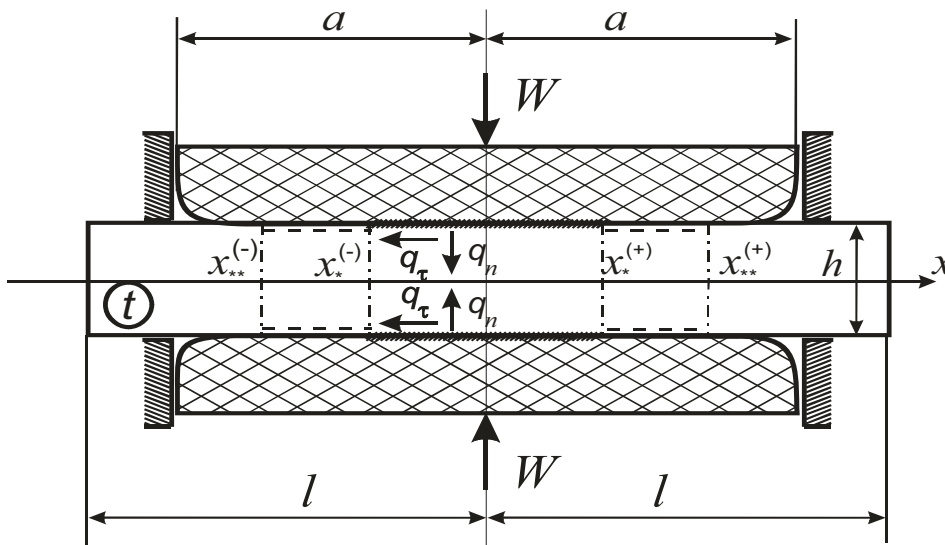


Рисунок 1

Поскольку между штампами и пластиной негладкий контакт, действие штампов на пластину описывается двумя функциями продольной координаты x : $q_\tau(x)$ (касательное контактное взаимодействие) и $q_n(x)$ (нормальное контактное взаимодействие), одинаковыми на обеих лицевых поверхностях пластины, ввиду симметрии задачи относительно x . Ввиду этой же симметрии имеем только две отличные от нуля переменные состояния пластины: $N = T_{11}(x)$ - продольные усилия в пластине, $V = V_1(x)$ - осредненные по толщине пластины продольные перемещения.

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} q_1^{(-1)}(x) &= -q_\tau(x); \quad q_3^{(-1)}(x) = q_n(x); \quad u_3^{(-1)}(x) = W; \quad N(-l) = 0; \\ q_1^{(+1)}(x) &= -q_\tau(x); \quad q_3^{(+1)}(x) = -q_n(x); \quad u_3^{(+1)}(x) = -W; \quad N(l) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом обозначений: $u_\tau^{(j)} = u_1\left(x, \frac{jh}{2}\right)$, $u_n^{(j)} = u_3\left(x, \frac{jh}{2}\right)$ -

касательные и нормальные перемещения точек лицевых поверхностей пластины соответственно; $j = \mp 1$ - верхняя и нижняя поверхности пластины соответственно, уравнения (6), (12), (13) при постоянном значении t примут вид:

$$\frac{dN}{dx} = 2 \cdot q_\tau; \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1-\nu}{2G} N + \frac{\nu}{2G} \left(2 \left(b - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{dq_\tau}{dx} + q_n \right) + (1+\nu) \cdot \alpha \cdot t; \quad (24)$$

$$u_\tau^{(j)} = V - \frac{2-\nu}{G} \cdot \left(b - \frac{1}{4} \right) \cdot q_\tau + \frac{1-\nu}{2G} \cdot \left(\lambda_{\tau\tau} \cdot \frac{d^2 q_\tau}{dx^2} + \lambda_{\tau n} \cdot \frac{dq_n}{dx} \right);$$

$$u_n^{(j)} = j \cdot \left(\frac{\nu}{4G} \cdot N + \frac{1-\nu}{2G} \left(\lambda_{n\tau} \frac{dq_\tau}{dx} + \lambda_{nn} \cdot q_n \right) - \frac{1}{2} (1+\nu) \cdot \alpha \cdot t \right). \quad (25)$$

Здесь $u_\tau^{(j)} = u_\tau\left(x, \frac{jh}{2}\right)$, $u_n^{(j)} = u_n\left(x, \frac{jh}{2}\right)$ - касательные и

нормальные перемещения точек лицевых поверхностей пластины соответственно; $j = \mp 1$ - верхняя и нижняя поверхности пластины

соответственно; $b = 0,337$, $\lambda_{\tau\tau} = \Lambda_{11}^{(j,+1)} + \Lambda_{11}^{(j,-1)} = 0,0315$,

$\lambda_{\tau n} = \left(\Lambda_{13}^{(j,+1)} - \Lambda_{13}^{(j,-1)} \right) / j = \lambda_{n\tau} = 0,115$, $\lambda_{nn} = \Lambda_{31}^{(+1,+1)} + \Lambda_{31}^{(+1,-1)} = 0,5$ -

коэффициенты, соответствующие рассматриваемому классу задач.

В каждой точке под штампом возможно одно из трех состояний: сцепление, проскальзывание с трением или отставание.

В области сцепления $x \in (x_*^{(-)}, x_*^{(+)})$ имеют место условия:

$$u_\tau^{(j)} = 0; u_n^{(j)} = -jW. \quad (26)$$

В области проскальзывания с трением вправо $x \in (x_{**}^{(-)}, x_*^{(-)}) \cup (x_*^{(+)}, x_{**}^{(+)})$:

$$q_\tau = f \cdot q_n \geq 0; u_n^{(j)} = -jW, \quad (27)$$

где f - коэффициент трения - скольжения.

В области отставания $x \in (-a_u, x_{**}^{(-)}) \cup (x_{**}^{(+)}, a_u)$:

$$|u_n^{(j)}| > W; q_\tau \equiv 0; q_n \equiv 0. \quad (28)$$

Исключая переменные состояния N, V из контактных соотношений (25) путем их дифференцирования с использованием уравнений (24) при условиях (26) – (28) получаем разрешающие уравнения относительно контактных взаимодействий q_τ, q_n с краевыми условиями на них:

- в области сцепления

$$\begin{aligned} \frac{d^4 q_\tau}{dx^4} - 2A_c \frac{d^2 q_\tau}{dx^2} + B_c^2 q_\tau &= 0; V = -\frac{1-\nu}{G} \Lambda \left(\frac{d^2 q_\tau}{dx^2} - D_c q_\tau \right); \\ q_n &= \frac{4(1-\nu)GW}{1-2\nu} + \frac{2\nu}{(1-\nu)B_c^2} \left(\frac{d^2 q_\tau}{dx^2} - 2(A_c + C_c) \frac{dq_\tau}{dx} \right) + \frac{2G \cdot (1+\nu)}{1-2\nu} \cdot \alpha \cdot t; \\ N &= -\frac{2}{B_c^2} \left(\frac{d^3 q_\tau}{dx^3} - 2A_c \frac{dq_\tau}{dx} \right) + \frac{2\nu GW}{1-2\nu} - \frac{2G \cdot (1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \cdot t, \end{aligned} \quad (29)$$

- в области предельного состояния проскальзывания с трением

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_\tau}{dx^2} - 2A_T \frac{dq_\tau}{dx} + B_T^2 q_\tau &= 0; \\ \frac{dq_\tau}{dx} + 2A_T q_\tau &= \frac{2GW}{(1-\nu)\lambda_{nr}} \left(1 - \frac{\nu N}{4GW} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} G\alpha t; \\ q_n = \frac{q_\tau}{f}; V - u_\tau^{(+)} &= \frac{\Lambda(1-\nu)}{2fG\lambda_{nr}} \left(\frac{dq_\tau}{dx} - D_T q_\tau \right); \end{aligned} \quad (30)$$

В формулах (29), (30) коэффициенты $A_c, A_T, B_c, B_T, C_c, D_c, D_T, \Lambda$ выражаются через коэффициент Пуассона, модуль сдвига,

коэффициент трения – скольжения, а также коэффициенты b , λ_{rr} , λ_{rn} , λ_{nr} , λ_{nn} .

Непосредственно из соотношений (25) с учетом условий (28) следует, что отставание по всей области контакта наступает при выполнении условия

$$\frac{\alpha \cdot t}{W} \leq -\frac{2}{1 + \nu} \quad (31)$$

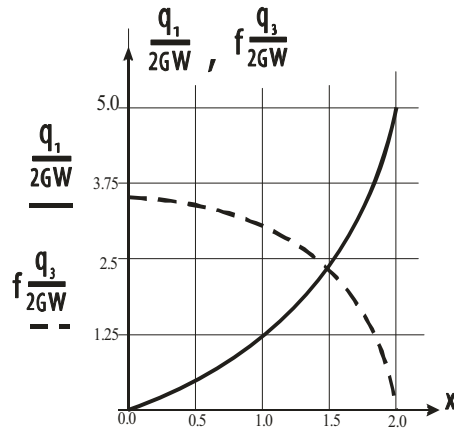


Рисунок 2

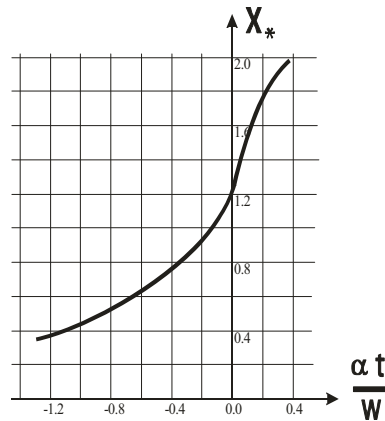


Рисунок 3

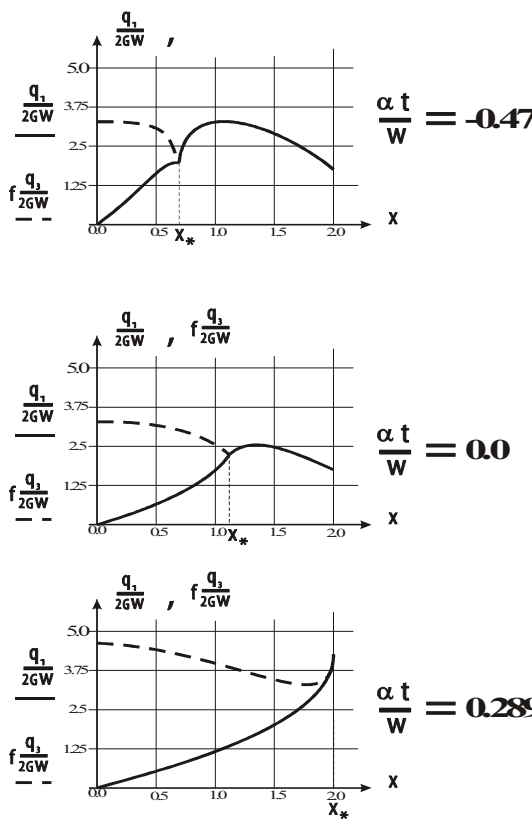


Рисунок 4

Ввиду симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$, достаточно ограничиться рассмотрением лишь правой половины пластины $0 \leq x \leq a$, где a - полуширина области контакта, которую несмотря на скругление штампов будем приближенно считать равной полуширине штампа.

Начнем с определения возможности одновременного образования областей сцепления и проскальзывания в области контакта. С этой целью вначале предположим сцепление по всей области контакта. Из-за симметрии относительно плоскости $x = 0$ общий интеграл системы (29)

имеет две произвольные константы, которые удобно выразить через $N(x_*^{(+)})$, $q_r(x_*^{(+)})$. В этом случае $N(x_*^{(+)}) = 0$, а $q_r(x_*^{(+)})$ определяется из условия $q_n(x_*^{(+)}) = 0$. Результат вычисления контактных взаимодействий $q_r(x)$, $q_n(x)$ при параметрах $t = 0$; $a = 2$; $\nu = 0,45$; $f = 0,4$ на рисунке 2. Как видно, в области $1,5 < |x| < 2$ оказывается, что $|q_r(x)| > f \cdot |q_n(x)|$, то есть имеет место тенденция к проскальзыванию по краям области контакта.

Теперь допустим наличие в области контакта двух состояний и обозначим через x_* точку перехода от сцепления к проскальзыванию. Область проскальзывания описывается системой (30). Общий интеграл этой системы содержит две произвольные константы, которые удобно выразить через $N(x_*^{(+)})$, $N(x_{**}^{(+)})$. Используя краевое условие $N(x_{**}^{(+)}) = N(a) = 0$ и условие сопряжения $N(x_* - 0) = N(x_* + 0) = N_*$, получим выражения $q_r(x)$, $q_n(x)$, $V(x)$, содержащие три константы q_* , N_* и x_* . Для определения последних используем условия непрерывности функций $V(x)$ и $u_r^{(j)}(x)$ в точке $x = x_*$, а также дополнительные условия контактного взаимодействия $|q_r(x_* + 0)| = |q_r(x_* - 0)| = f \cdot |q_n(x_* - 0)|$. На рисунке 3 для параметров $a = 2$; $\nu = 0,45$; $f = 0,4$ представлена зависимость величины области сцепления x_* от величины $\frac{\alpha \cdot t}{W}$, а на рисунке 4 распределение контактного взаимодействия при $\frac{\alpha \cdot t}{W} = -0,47; 0,0; 0,289$.

Выводы

1. Построена уточненная теория пластин, находящихся в стационарном температурном поле, приемлемая для решения контактных задач по лицевым поверхностям.

2. На основе полученных уравнений рассмотрена деформация негладкой пластины в температурном поле, зажатой между плоскими штампами. Исследован симметричный процесс, когда сначала пластина была обжата штампами путем задания их поступательного

перемещения $\pm W$, а затем температурное поле t изменялось оставаясь постоянным по толщине и ширине пластины. Установлено, что в начале процесса, когда $t = 0$, точка смены состояний x_* сцепления и проскальзывания с трением не зависит от интенсивности обжата W . При уменьшении t область сцепления уменьшается и при величине $\frac{\alpha \cdot t}{W} = \frac{2}{1 + \nu}$ исчезает. При этом вместе с областью сцепления скачком исчезает и область проскальзывания, то есть пластина переходит в состояние полного отставания. При увеличении t область проскальзывания уменьшается до наступления полного сцепления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – №2. – С. 158-167.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
3. Власов В.З. Избранные труды, т.1, М.: издательство академии наук СССР, 1962.
4. Лурье А.И. Теория упругости. – М., 1970.
5. Наумова И.Ю. Исследование зависимости характера взаимодействия пластины со сжимающими ее штампами от значений торцевых нагрузок // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Том 4. Дніпропетровськ. 2010. С. 11-22.

Получено 27.10.2010г.