УДК 539.3

Э.Б. Эйвазов

ОСОБЕННОСТИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ ПОЛОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БРУСА С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА

Аннотация. Данная статья посвящена к исследованию напряженного состояния изотропного призматического стержня при изгибе из физически нелинейного материала.
Задача решается с при мнением теории функции комплексного переменного и конформного отображения и в итоге используя теорему о вычетах найдена коэффициент, a *а потом напряжения в характерных точках стержня.*

Представленная задача решается методом последовательных приближений с применением теории функции комплексного переменного и конформного отображения. При решении задачи будем ограничиваться только первым приближением т.к., нулевое приближение соответствует линейному, по этому автором, а также в работах [1,2,3] доказаны, что учет последующих приближений и компонентов напряжений, возникает при переходе от линейной задачи к нелинейной, несущественно влияет на напряженно–деформированное состояние тела.

Пусть поперечное сечение S цилиндра ограничено извне контуром L_1, а изнутри – контуром L_2, имеющей общий центр с контуром L_1.

Введем координатную систему (x, y, ν), причем ось $o\nu$ направим параллельно образующим цилиндрического стержня, а оси ox и oy пусть будут главными осями инерции, при этом ось ox направим в сторону растянутых волокон. Оба изгибающие моменты M, приложенные к концам стержня, действуют в плоскости $xo\nu$.

Тогда на основе (1) изгибающие напряжения определяются следующей формулой:

$$\sigma_\nu = \beta x + l_2 f(x, y) \tag{1}$$

где: $\beta = \dfrac{M}{J}$; M – изгибающий момент, J – момент инерции; l_2 – константа, которая учитывает отклонение от закона Гука.

$$f(x,y) = \frac{9KG}{3K+G}\left[-\frac{2}{27G^3}\cdot\beta^3 x^3 + ax + by + c\right] \tag{2}$$

Здесь коэффициенты входящее в формулы (2) K и G - соответственно объемный модуль и модуль сдвига.

Входящие в формулу (2) постоянные интегрирования a, b, c определяются из следующих условий:

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = 0;\quad \iint_S f(x,y)\,xdxdy = 0;\quad \iint_S f(x,y)\,ydxdy = 0; \tag{3}$$

Учитывая (2) в (3) и тогда увидим, что первое и третье условия в формуле (3) удовлетворяются тождественно при $b = c = 0$ (так как поперечное сечение стержня симметрично, относительно координатных осей). Чтобы найти постоянную a, с помощью формулы Грина приведем второе условие в формуле (3) к виду:

$$\sum\int_{L_j}\frac{2}{27}\cdot\frac{\beta}{G^3}x^4 ydx + \frac{1}{3}dx^3 dy = 0 \tag{4}$$

Переходя к комплексной переменной $z = x + iy$ в (4), получим следующее уравнение для определения постоянной a:

$$\begin{gathered}\frac{1}{18}\cdot\frac{\beta^3}{G^3}\sum\int_{L_j}\left(t^5 + 3t^4\cdot\bar{t} + 2t^3\cdot t^{-2} - 2t^2\cdot t^{-3} - 3t\cdot t^{-4} - t^{-5}\right)\cdot\left(dt + d\bar{t}\right) + \\ + a\sum\int_{L_j}\left(t^3 + 3t^2\cdot\bar{t} + 3t\cdot t^{-2} + t^3\right)\cdot\left(dt + d\bar{t}\right) = 0\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь t – аффикс контуров $L_j\,(j = 1,2)$

Применив интегрирование по частям в (5), будет иметь:

$$a = \frac{1}{18}\cdot\frac{\beta^3}{G^3}\cdot\frac{\sum\int\left(t^4\cdot\bar{t} + 2\overline{t^3}\cdot\overline{t^2} + 2t^2\cdot\overline{t^3} + t\cdot\overline{t^4} + \frac{1}{5}\overline{t^5}\right)dt}{\sum\int\left(3t^2\cdot\bar{t} + 3t\cdot t^{-2} + t^{-3}\right)dt} \tag{6}$$

Для решения (6) будем использовать теорию конформного отображения. При этом внешность эллипса L_1 отображается на внешность единичной окружности γ в вспомогательной плоскости χ с помощью функции

$$t = A\tau\left(1+\frac{m}{\tau^2}\right) \tag{7}$$

где

$$A=\frac{a+b}{2};\ |m|=\frac{a-b}{a+b}.$$

Здесь τ – аффикс точки γ, a и b – соответственно, большая и малая полуоси эллипса. Знак m определяет форму расположения контура L_1 в плоскости z. Когда $m>0$, большая ось симметрии эллипса совпадает с осью абсцисс, а когда $m<0$, малая ось симметрии совпадает с осью абсцисс.

Учитывая формулу (7) в (6) и используя теорему о вычетах, легко находим:

$$a=\frac{1}{27}\cdot\frac{\beta^3}{G^3}\cdot\frac{(1-m)\cdot(1+m)^5 A^6-R^6}{(1-m)\cdot(1+m)^3 A^4-R^4} \tag{8}$$

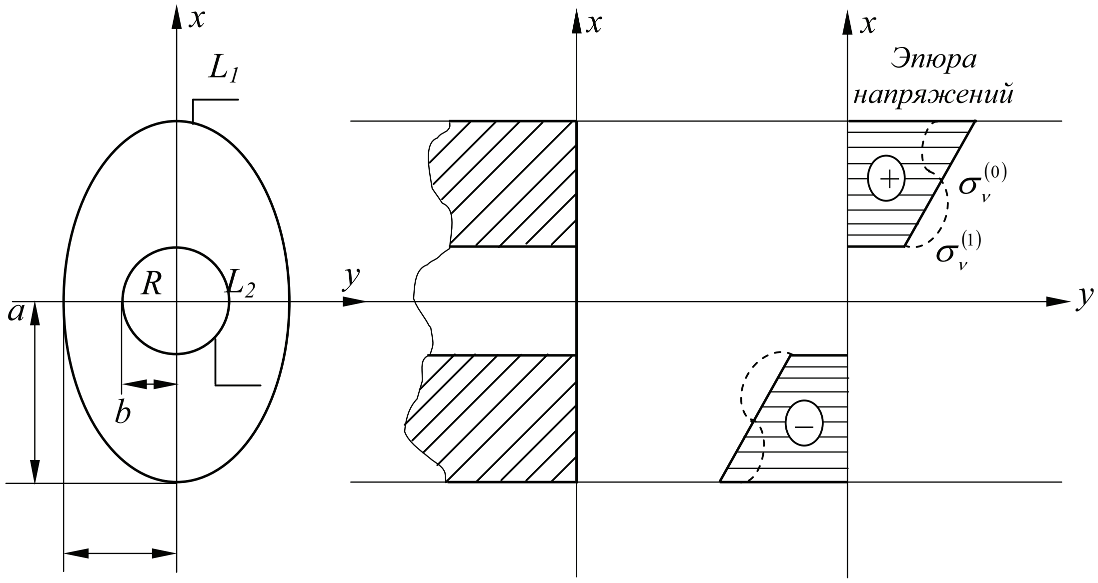
Проиллюстрируем полученное решение численными примерами при следующих данных:

1) $\frac{a}{b}=3;\ m=\frac{1}{2};\ \frac{R}{A}=\frac{\sqrt{2}}{4};$ 2) $\frac{a}{b}=3;\ m=\frac{1}{2};\ \frac{R}{A}=\frac{1}{2};$

3) $\frac{a}{b}=3;\ m=-\frac{1}{2};\ \frac{R}{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Пусть стержень изготовлен из чистой меди $\left(l_2=0{,}18\cdot10^6;\ k=1{,}37\cdot10^5\,\text{Мн/м}^2;\ G=0{,}46\cdot10^5\,\text{Мн/м}^2\right)$, при этом для вариантов 1 и 2 примем $\beta=15\ Кн/a_1$, а для варианта 3 $\beta=15\ Кн/b_1$.

Далее при помощи (8) для всех вариантов найдена постоянная и подставлена в (2), а потом в (1), таким образом в характерных точках поперечного сечения стержня найдены напряжения изгиба σ, а для варианта 1 на эпюре сплошная линия соответствует линейному, а пунктирная линия – нелинейному решению. Из таблицы видно, что там, где больше концентрации напряжений при учете физической нелинейности материала, напряжение концентрации уменьшилось примерно на 15–20%, а там где концентрация напряжений меньше, наоборот, увеличилась. Таким образом, на основании приведенного численного анализа можем сделать следующие выводы: для стержней, ослабленных продольными полостями, учет физической нелинейности материала приводит к снижению концентрации напряжений, т.е. более равномерному распределению напряжений в зонах концентраций и сглаживанию эпюр напряжений в опасных сечениях.



Рисунок

Таблица

Коорд. точк.	Вариант 1		Вариант 2		Коорд. точк.	Вариант 3	
	$\sigma_\nu^{(0)}$ Кн/см^2	$\sigma_\nu^{(1)}$ Кн/см^2	$\sigma_\nu^{(0)}$ Кн/см^2	$\sigma_\nu^{(1)}$ Кн/см^2		$\sigma_\nu^{(0)}$ Кн/см^2	$\sigma_\nu^{(1)}$ Кн/см^2
O,R	3,536	4,143	5	5,812	O,R	10,607	11,122
$O,R+\dfrac{a-R}{2}$	0,268	9,703	10	10,349	$O_1\dfrac{b-R}{2}+R$	12,803	12,306
O,a	15	12,158	15	12,335	O,b	15	12,859

ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. «Нелинейная механика». – М.: ИЛ, 1961, 777 с.
2. Kuliyev S. «Physical non – linear problems of elasticity theory». Baku, Azernesher, 2010, 465 p.
3. Грин А., Адкинс Д. «Большее упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды». Москва, 1965г. 456 с.
4. Исаев А.М., Гарибов Р.Т. Кручение эллиптического бруса, ослабленного центральной цилиндрической полостью с учетом физической нелинейности материала. Изв.ВУЗов, Строительство и архитектура. Новосибирск, 1985, №7, с. 22–24.

Получено 19.10.2010г.