

УДК 539.3

И.Ю. Наумова

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ХАРАКТЕРА
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЮЩИМИ ЕЕ
ШТАМПАМИ ОТ ЗНАЧЕНИЯ ТОРЦЕВЫХ НАГРУЗОК**

Анотація. Розглянута контактна задача про взаємодію пластини зі штампами, що її стискають, під дією торцевих навантажень у постановці уточненої теорії пластин. Отримано рівняння щодо контактних взаємодій в диференціальній формі і знайдено загальний інтеграл цих рівнянь. Досліджено чотири варіанти взаємного розташування пластини і штамів.

Введение. Исследуемая задача относится к классу плоских контактных задач, в которых в области контакта имеются участки области сцепления и проскальзывания с трением. При решении таких задач в постановке теории упругости возникают трудности при численной реализации, в связи с большими градиентами контактных взаимодействий в окрестности границ области сцепления. Расположение этих границ зависит от интенсивности приложенных торцевых нагрузок и заранее неизвестно. Решение этих задач в постановке уточненной теории пластин [1] дает возможность более полно исследовать характер взаимодействия негладкой пластины со штампами.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую деформацию негладкой пластины толщины h и ширины $2l$, зажатой между плоскими штампами так, что заданы их поступательные перемещения W (рис. 1). К торцам пластины приложена продольная нагрузка, главный вектор которой P^- на левом торце и P^+ на правом.

Поскольку между штампами и пластиной негладкий контакт, действие штампов на пластину описывается двумя функциями продольной координаты x : $q_\tau(x)$ (касательное контактное взаимодействие) и $q_n(x)$ (нормальное контактное взаимодействие), одинаковыми на обеих лицевых поверхностях пластины ввиду симметрии задачи относительно x .

© Наумова И.Ю., 2010

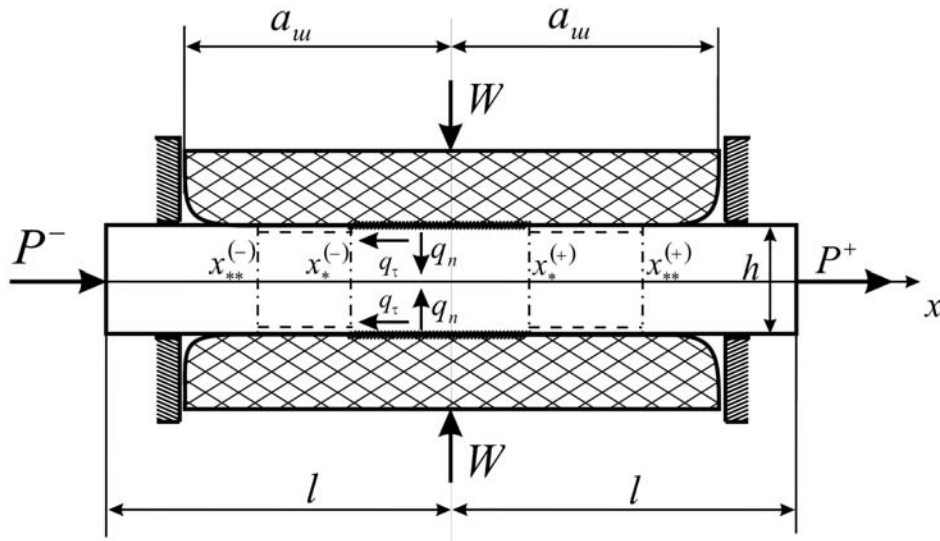


Рисунок 1

Уравнения уточненной теории пластин [1] для плоской деформации со специальными коэффициентами [2] в этом случае приобретают вид:

$$\frac{dN}{dx} = 2 \cdot q_\tau; \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1-\nu}{2G} N + \frac{\nu}{2G} \left(2 \left(b - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{dq_\tau}{dx} + q_n \right); \quad (1)$$

$$u_\tau^{(j)} = V - \frac{2-\nu}{G} \cdot \left(b - \frac{1}{4} \right) \cdot q_\tau + \frac{1-\nu}{2G} \cdot \left(\lambda_{\tau\tau} \cdot \frac{d^2 q_\tau}{dx^2} + \lambda_{\tau n} \cdot \frac{dq_n}{dx} \right)$$

$$u_n^{(j)} = j \cdot \left(\frac{\nu}{4G} \cdot N + \frac{1-\nu}{2G} \left(\lambda_{n\tau} \frac{dq_\tau}{dx} + \lambda_{nn} \cdot q_n \right) \right). \quad (2)$$

Здесь N - продольные усилия в пластине, V - осредненные по толщине пластины продольные перемещения, $u_\tau^{(j)} = u_\tau \left(x, \frac{jh}{2} \right)$, $u_n^{(j)} = u_n \left(x, \frac{jh}{2} \right)$ - касательные и нормальные перемещения точек лицевых поверхностей пластины соответственно; $j = \mp 1$ - верхняя и нижняя поверхности пластины соответственно; G , ν - модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала; $b = 0,337$, $\lambda_{\tau\tau} = 0,0315$, $\lambda_{\tau n} = \lambda_{n\tau} = 0,115$, $\lambda_{nn} = 0,5$ - коэффициенты, соответствующие рассматриваемому классу задач.

Краевые условия на торцах пластины следующие:

$$N(-1) = \frac{P^-}{h}; N(1) = \frac{P^+}{h}. \quad (3)$$

В каждой точке под штампом возможно одно из трех состояний: сцепление, проскальзывание с трением или отставание.

В области сцепления $x \in (x_*^{(-)}, x_*^{(+)})$ имеют место условия:

$$u_\tau^{(j)} = 0; u_n^{(j)} = -jW. \quad (4)$$

В области проскальзывания с трением вправо $x \in (x_{**}^{(-)}, x_*^{(-)}) \cup (x_*^{(+)}, x_{**}^{(+)})$:

$$q_\tau = f \cdot q_n \geq 0; u_n^{(j)} = -jW, \quad (5)$$

где f - коэффициент трения - скольжения.

В области отставания $x \in (-a_{ш}, x_{**}^{(-)}) \cup (x_{**}^{(+)}, a_{ш})$:

$$|u_n^{(j)}| > W; q_\tau \equiv 0; q_n \equiv 0. \quad (6)$$

Известно, что даже при заданных значениях коэффициента трения f и коэффициента Пуассона ν , пластина в области контакта на разных участках может находиться в различных состояниях в зависимости от соотношений между величинами P^- , P^+ и W . Для установления зависимости положения границ областей сцепления

$x = x_*^{(\pm)}$ и проскальзывания с трением $x = x_{**}^{(\pm)}$ от величин $\tilde{P}^\pm = \frac{\nu P^\pm}{4GWh}$

в первую очередь необходимо определить области допустимых значений величин \tilde{P}^\pm , при которых имеет место одно из трех состояний по всей области контакта пластины со штампами: отставание, проскальзывание с трением или сцепление. Такие состояния будем называть: полным отставанием, полным проскальзыванием, полным сцеплением.

Решение. Исключая переменные состояния N , V из контактных соотношений (2) путем их дифференцирования с использованием уравнений (1) при условиях (4) – (6) получаем разрешающие уравнения относительно контактных взаимодействий q_τ , q_n с краевыми условиями на них:

- в области сцепления:

$$\frac{d^4 q_\tau}{dx^4} - 2A_c \frac{d^2 q_\tau}{dx^2} + B_c^2 q_\tau = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 q_\tau}{dx^3} - 2A_c \frac{dq_\tau}{dx} &= -\frac{2vGW}{(1-v)^2 \Lambda} \left(1 - \frac{1-2v}{4vGW} N \right); \\ q_n &= \frac{4(1-v)GW}{1-2v} + \frac{2v}{(1-v)B_c^2} \left(\frac{d^2 q_\tau}{dx^2} - 2(A_c + C_c) \frac{dq_\tau}{dx} \right); \\ V &= -\frac{1-v}{G} \Lambda \left(\frac{d^2 q_\tau}{dx^2} - D_c q_\tau \right); \end{aligned} \quad (7)$$

- в области предельного состояния проскальзывания с трением

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_\tau}{dx^2} - 2A_T \frac{dq_\tau}{dx} + B_T^2 q_\tau &= 0; \quad \frac{dq_\tau}{dx} + 2A_T q_\tau = \frac{2GW}{(1-v)\lambda_{nr}} \left(1 - \frac{vN}{4GW} \right); \\ q_n &= \frac{q_\tau}{f}; \quad V - u_\tau^{(+)} = \frac{\Lambda(1-v)}{2fG\lambda_{nr}} \left(\frac{dq_\tau}{dx} - D_T q_\tau \right); \end{aligned} \quad (8)$$

- в области отставания

$$\frac{du_n^{(+)}}{dx} = 0; \quad \frac{du_\tau^{(+)}}{dx} + 2\frac{1-v}{v} u_n^{(+)} = 0; \quad V = u_\tau^{(+)}; \quad N = -\frac{4Gu_3^{(+)}}{v}. \quad (9)$$

В формулах (7) – (9) коэффициенты A_c , A_T , B_c , B_T , C_c , D_c , D_T , Λ выражаются через коэффициент Пуассона, модуль сдвига, коэффициент трения – скольжения, а также коэффициенты b , $\lambda_{\tau\tau}$, $\lambda_{\tau n}$, λ_{nn} .

Общий интеграл системы (7) имеет четыре произвольные константы, которые удобно выразить через $N(x_*^{(\pm)})$, $q_\tau(x_*^{(\pm)})$. Общий интеграл системы (8) имеет две произвольные константы, которые удобно выразить через $N(x_*^{(+)})$, $N(x_{**}^{(+)})$ или через $N(x_*^{(-)})$, $N(x_{**}^{(-)})$. Здесь необходимо уточнить постановку исходной задачи. Возможны следующие четыре варианта взаимного расположения пластины и штампов (рис. 2). Пластина на входе в пространство между штампами (рис. 2-а); пластина на выходе (рис. 2-б); пластина вся помещается между штампами, когда ее ширина меньше ширины штампов (рис. 3-в) или края пластины оказываются вне штампов, когда ширина пластины больше ширины штампов (рис. 4-г).

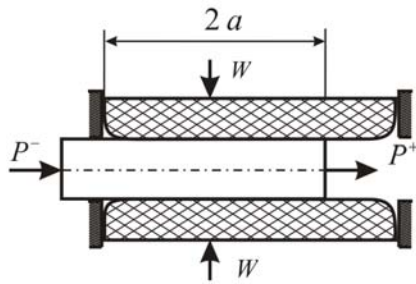


Рисунок 2-а

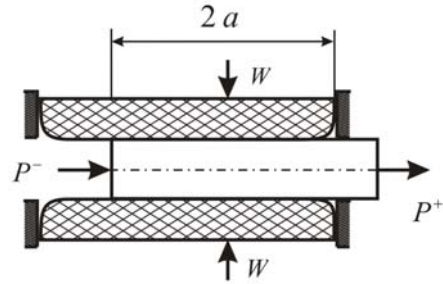


Рисунок 2-б

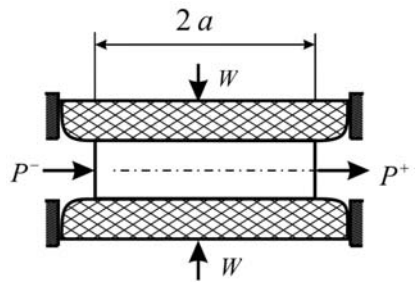


Рисунок 2-в

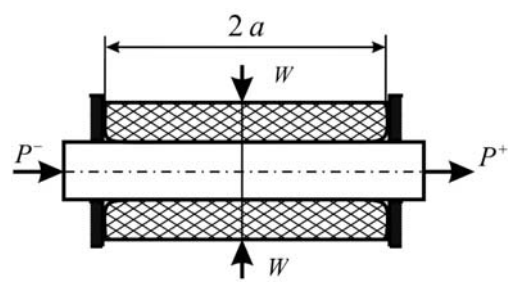


Рисунок 2-г

Состояние полного отставания, как следует из уравнений (9) и условий (3), (6), наступает при

$$\tilde{P}^+ = -\tilde{P}^- \geq 1 \quad (10)$$

На рисунке 3 состояние (10) изображается лучом 1.

Рассмотрим состояние полного проскальзывания с трением вправо. В этом случае краевые условия на торцах полностью определяют ее контактные взаимодействия q_τ , q_n , которые линейно выражаются через \tilde{P}^+ , \tilde{P}^- следующим образом

$$q_\tau = \frac{2GW}{v} \left((1 - \tilde{P}^+) \cdot \Phi_1(x, a) - (1 - \tilde{P}^-) \cdot \Phi_2(x, a) \right), \quad (11)$$

где

$$\Phi_1(x, a_T) = \Phi(x, a, \lambda_1, \lambda_2);$$

$$\Phi_2(x, a) = \Phi(-x, a, -\lambda_1, -\lambda_2);$$

$$\lambda_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - B^2};$$

$$\Phi(x, a_T, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\exp(2\lambda_1 a) \cdot (\lambda_1 \cdot \exp(-\lambda_1(a+x)) - \lambda_2 \cdot \exp(-\lambda_2(a+x)))}{1 - \exp(-2(\lambda_2 - \lambda_1)a)}$$

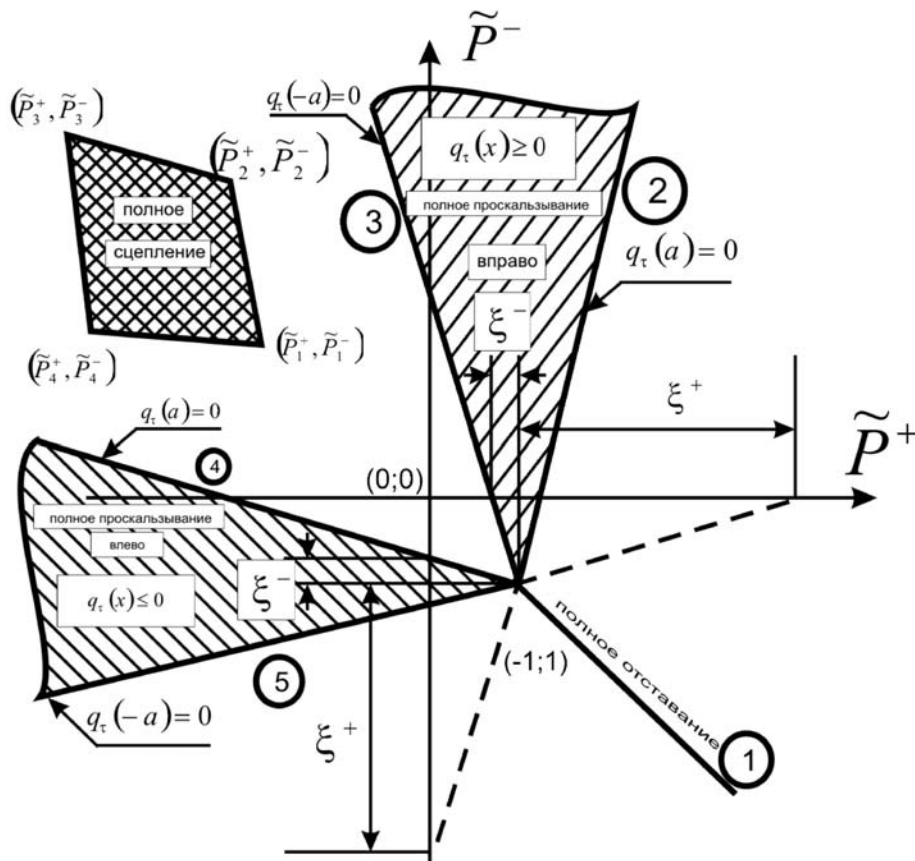


Рисунок 3

В каждой точке x_k области контакта $[-a; a]$ первое из условий (5) накладывает ограничение на \tilde{P}^\pm в виде линейного неравенства

$$q_\tau(\tilde{x}_k; \tilde{P}^+; \tilde{P}^-) \geq 0; \quad \tilde{x}_k = x_k + a_{ш} - a. \quad (12)$$

Решение этого неравенства представляет собой полуплоскость, ограниченную прямой, проходящей через точку $\tilde{P}^+ = 1; \tilde{P}^- = -1$. Пересечением множеств полуплоскостей для всех точек из области $|\tilde{x}_k| \leq a$ является сектор, ограниченный лучами 2 и 3 (рис. 3). Луч 2 соответствует условию $q_\tau(a) = 0$; луч 3 – условию $q_\tau(-a) = 0$. Положение лучей 2 и 3 определяется значениями параметров ξ^\pm

$$\xi^- = \frac{\lambda_2 \exp(-2\lambda_1 a) - \lambda_1 \exp(-2\lambda_2 a)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\xi^+ = \frac{\lambda_1 \exp(2\lambda_2 a) - \lambda_2 \exp(-2\lambda_1 a)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (13)$$

Такая область в виде сектора получается для расположения пластины, изображенного на рисунке (2-г). В задачах, показанных на рисунках (2-а) – (2-в), дополнительно имеются условия парности касательных напряжений, для удовлетворения которых произволов нет. Это можно истолковать так, что состояние полного проскальзывания при расположении торцов пластины под штампом и произвольном нагружении их силами \tilde{P}^{\pm} не возможно. Однако, если связать силы \tilde{P}^+ и \tilde{P}^- так, чтобы $q_{\tau}(a) = 0$:

$$\tilde{P}^- = \xi^+ (\tilde{P}^+ - 1) - 1, \quad (14)$$

то может реализоваться полное проскальзывание для пластины на входе (рис. 2-а). При этом сектор проскальзывания с трением вырождается в луч 2.

Аналогично можно найти объяснение состояния полного проскальзывания для задачи, когда пластина находится на выходе (рис. 2-б). В этом случае выполнение условия парности касательных напряжений $q_{\tau}(-a) = 0$ можно добиться, если положить

$$\tilde{P}^- = \frac{1}{\xi^-} (1 - \tilde{P}^+) - 1. \quad (15)$$

При этом сектор проскальзывания вырождается в луч 3.

Что касается задачи, изображенной на рисунке 2-в то здесь полное проскальзывание невозможно ни при каких значениях \tilde{P}^{\pm} . Действительно, в этом случае из условия парности касательных напряжений $q_{\tau}(\pm a) = 0$ согласно (11) следует, что $\tilde{P}^+ = -\tilde{P}^- = 1$, то есть имеет место полное отставание. Такой вывод справедлив, если пластина ограничена идеальным прямоугольником. В реальных же конструкциях ребра пластины, как правило, скруглены. Поэтому условия парности касательных напряжений на торцах пластины отпадают и получаем что этот случай эквивалентен задаче, изображенной на рисунке 2-г.

При полном проскальзывании влево во всей области контакта имеет место условие:

$$q_{\tau} = -f \cdot q_n \leq 0; u_n^{(j)} = -jW. \quad (16)$$

Исследование этого состояния пластины аналогично исследованию проскальзывания пластины вправо. В результате получим заштрихованную на рисунке 3 область, ограниченную

лучами 4 и 5, которая является зеркальным отображением заштрихованной области, ограниченной лучами 2 и 3 относительно прямой $\tilde{P}^+ + \tilde{P}^- = 0$. Луч 4 описывает проскальзывание влево пластины на рисунке 2-а, луч 5 – на рисунке 2-б.

Перейдем к определению области допустимых значений сил \tilde{P}^\pm , при которых имеет место полное сцепление, определяемое условиями

$$|q_\tau(x)| < f \cdot q_n(x); q_n(x) > 0, |x| \leq a. \quad (17)$$

После удовлетворения условиям на торцах пластины (3) остаются неопределенными 2 константы $q_\tau(\pm a)$. Если оба конца или один из концов пластины находятся под штампом (рис. 2-а, 2-б, 2-в), то соответствующая этому константа в силу закона парности касательных напряжений должна обращаться в ноль. Если конец пластины или оба конца выходят за штамп, то в данной постановке задачи условий для определения указанных констант нет. В постановке теории упругости в этом случае возникает осцилляционная особенность [3,4] и, следовательно, соответствующее касательное взаимодействие в этой точке не определяется. В предлагаемой постановке будем предполагать, что концы штампа скруглены. Тогда естественно в этом месте задать условие $q_n(\pm a) = 0$, из которого можно определить недостающие константы $q_\tau(\pm a)$.

Таким образом, учитывая сказанное выше, условия полного сцепления (17) представляют собой систему линейных неравенств относительно \tilde{P}^\pm , которые должны выполняться при любом значении $x \in (-a, a)$. Решение этой системы – пересечение ее решений для каждого значения $x = x_k$ в отдельности. Для каждого $x = x_k$ система (17) эквивалентна двойному неравенству

$$-f \cdot q_n(x_k; \tilde{P}^+, \tilde{P}^-) \leq q_\tau(x_k; \tilde{P}^+, \tilde{P}^-) \leq f \cdot q_n(x_k; \tilde{P}^+, \tilde{P}^-), |x_k| \leq a. \quad (18)$$

Решением (18) в плоскости \tilde{P}^+ , \tilde{P}^- является сектор, ограниченный лучами предельных состояний сцепления в каждой точке $x = x_k$. Тогда решением для всех точек области $|x_k| \leq a$ является пересечение множеств секторов (18). Переход от сцепления

к проскальзыванию может наступить в первую очередь в тех точках x_* , в которых функции

$$F^{(\pm)}(x_k) = f \cdot q_n(x_k; \tilde{P}^+, \tilde{P}^-) \mp q_\tau(x_k; \tilde{P}^+, \tilde{P}^-) \quad (19)$$

достигают минимума. Таких точек, соответствующих двум функциям (19), будет две. Поэтому, пересечением множеств секторов (18) является пересечение секторов, соответствующих этим двум точкам, то есть, четырехугольник. Качественная картина области сцепления изображена на рисунке 3 в виде четырехугольника с вершинами \tilde{P}_k^\pm ($k = 1, 2, 3, 4$). На рисунках 4 – 7 приведены картины рассматриваемых состояний для рассматриваемых взаимных расположений пластины и штампов при следующих значениях параметров: $\nu = 0,3$, $f = 0,4$, $a = 2h$.

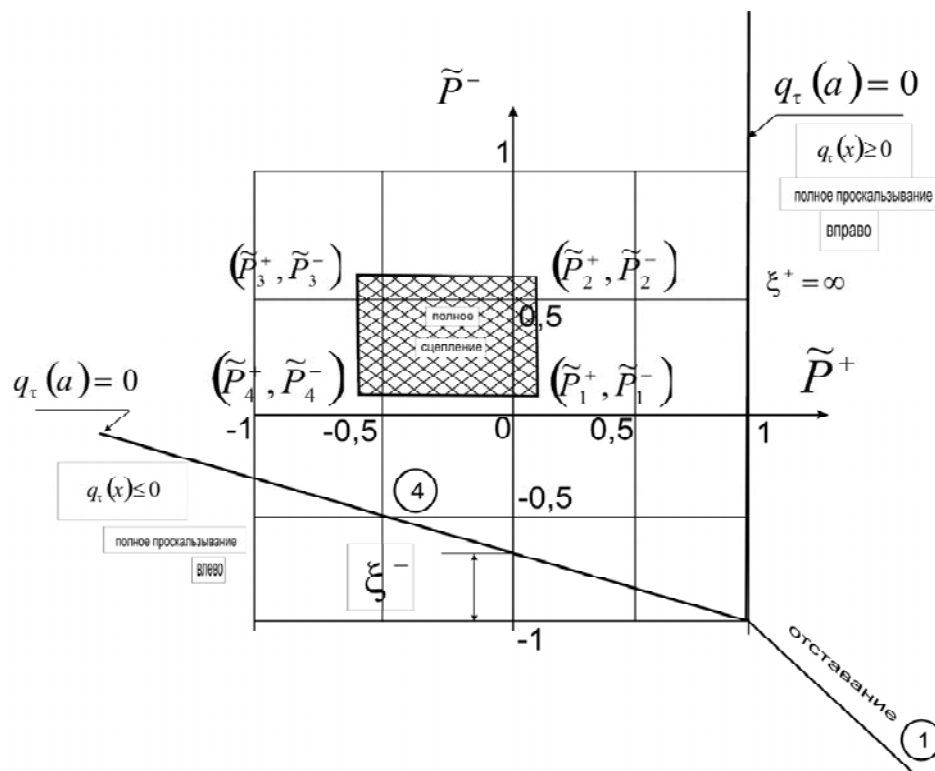


Рисунок 4

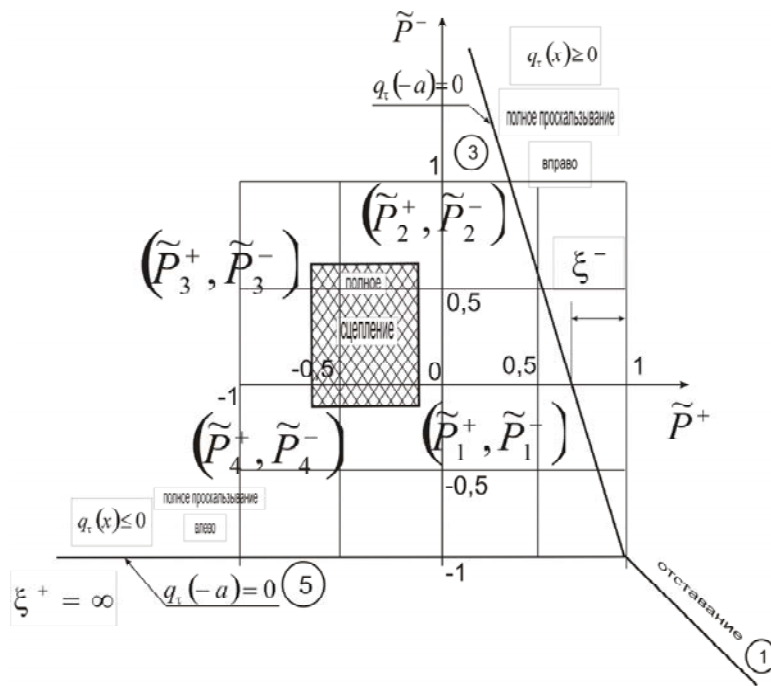


Рисунок 5

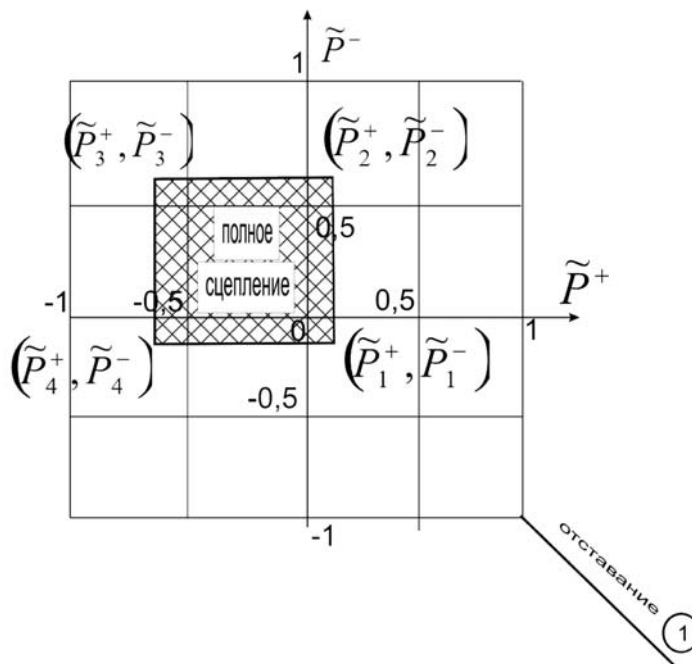


Рисунок 6

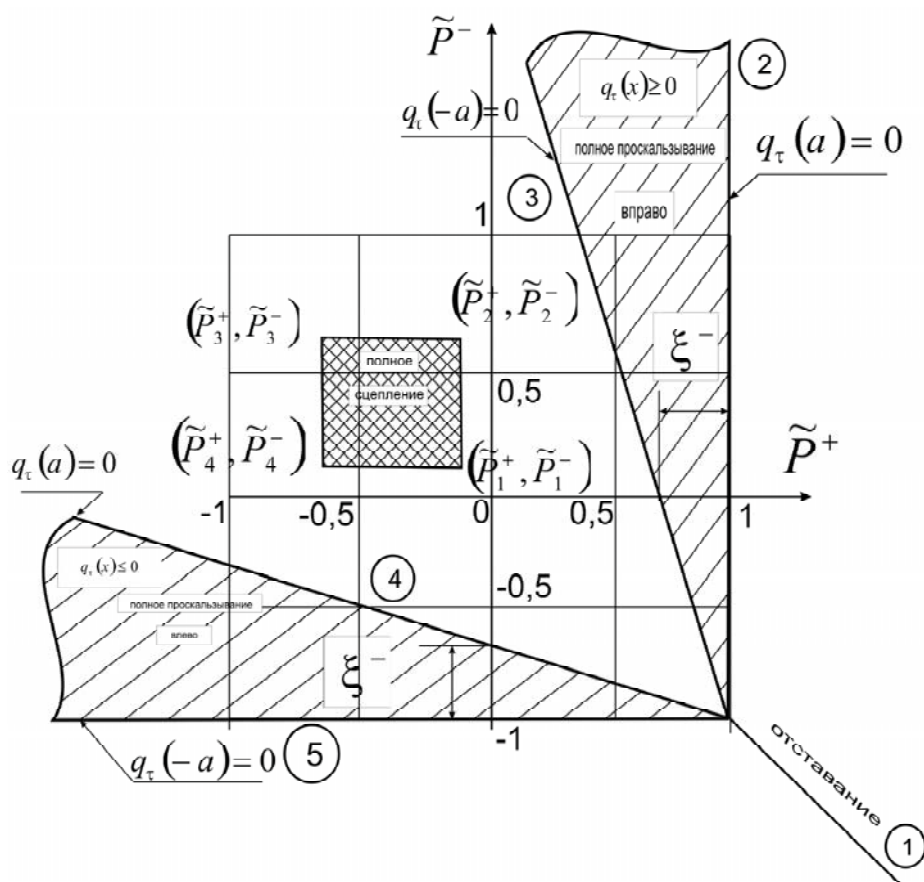


Рисунок 7

Выводы

1. Анализ параметров ξ^\pm показывает, что при $a \geq 2h$ и любых реальных значениях ν и f луч 2 практически вертикален, луч 5 практически горизонтален (рис. 4, 5, 6).

2. Из вычислений следует, что при $l \geq 2h$, $f \geq 0,5$, $\nu \geq 0,4$ взаимное влияние концов пластины ничтожно, поэтому, область сцепления практически представляет собой прямоугольник, а для пластины на рисунках 2-в, 2-г – квадрат (рис. 4 – 7).

3. Для пластины, изображенной на рисунке 2-а картина полных состояний на рисунке 4. Силами \tilde{P}^\pm , принадлежащими лучу 2 осуществляется полное проскальзывание вправо, а силами \tilde{P}^\pm , принадлежащими лучу 4 осуществляется полное проскальзывание влево. Как видно, осуществить полное проскальзывание вправо только с помощью значений \tilde{P}^- невозможно, а $\tilde{P}^+ \geq 1$. Область полного сцепления для параметров $\nu = 0,3$, $f = 0,4$, $a = 2h$ -

прямоугольник с координатами $\tilde{P}_1^+ = \tilde{P}_2^+ = 0,06$; $\tilde{P}_3^+ = \tilde{P}_4^+ = -0,56$; $\tilde{P}_1^- = \tilde{P}_4^- = 0,08$; $\tilde{P}_2^- = \tilde{P}_3^- = 0,62$. Для других значений ν и f эта область приобретает как другую конфигурацию, так и другое положение центра. При этом зависимость координат вершин области сцепления от f слабо нелинейная, а от ν существенно нелинейная. При увеличении ν и f площадь области растёт и её центр удаляется от начала координат.

4. Области полных состояний для пластины на рисунке 2-б (рис.5) являются зеркальным отображением соответствующих областей для пластины на рисунке 2-а (рис.4).

5. Для пластин, изображенных на рисунках 2-в, 2-г, картина полных состояний (рис.6, 7) симметрична относительно прямой $\tilde{P}^+ + \tilde{P}^- = 0$. Если ширина пластины меньше ширины штампов (рис. 2-в) – область полного проскальзывания отсутствует. Если ширина пластины больше ширины штампов, то область полного проскальзывания – заштрихованная область, ограниченная лучами 2,3,4,5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
2. Наумова И.Ю. К решению контактных задач цилиндрического изгиба пластин // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Том 5. Дніпропетровськ. 1999. С. 139-150.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982.
4. Keer L.M., Miller G.R. contact between an elastically supported circular plate and a rigid intended // Int. J. Eng. Sci. – 1983. – 21, N6. – P. 681-690.

Получено 06.04.2010г.