УДК 536:669.02.09:669.054.82:005

И.А. Павлюченков, Е.В. Сало, В.П. Пиптюк,
Г.А. Андриевский, И.А. Ковальчук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ПЛАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ШЛАК-МЕТАЛЛ СФЕРЫ ИЗ ТУГОПЛАВКОГО МАТЕРИАЛА

Анотація. У статті розглянуто тепломасообмінний процес при плавленні добавок на межі шлак–метал у сталерозливному ковші при позапічній обробці металу. Враховано випадок, коли розглянута добавка частково занурена у розплав сталі, а частково знаходиться у розплаві шлаку. Розроблено алгоритм розрахунку двовимірної задачі плавлення тугоплавких матеріалів сферичної форми на основі різницевого метода Дюзимбера.

Введение. Ввод кусковых материалов в расплав при выпуске либо продувке стали не всегда сопровождается их прогнозированным плавлением под слоем расплава и равномерным распределением в объеме ковша. Поэтому задачи исследования тепломассообменных процессов при плавлении и усвоении добавок на границе шлак-металл в сталеразливочном ковше при внепечной обработке металла актуальны для металлургической практики. В работе учтен случай, когда рассматриваемая добавка частично погружена в расплав стали, а частично находится в расплаве шлака. Авторами работы разработан алгоритм расчета двухмерной задачи плавления тугоплавких материалов сферической формы на основе разностного метода Дюзимбера [1,2].

Постановка задачи. Рассмотрим процесс плавления кусковой добавки сферической формы из тугоплавкого материала на границе шлак-металл. Принимаем, что температуры жидкого металла $t_ж$ и жидкого шлака $t_ш$ выше температуры $t_{пл}$ плавления сферы. На верхней поверхности сферы, находящейся в расплаве шлака ($0 < \vartheta < \vartheta_0$), происходит конвективный теплообмен с жидким шлаком с заданным коэффициентом теплоотдачи $\alpha_ш$. На остальной поверхности сферы ($\vartheta_0 < \vartheta < \pi$) происходит конвективный теплообмен с жидким металлом с заданным коэффициентом теплоотдачи αм. Между намерзшими оболочками металла, шлака и поверхностью сферы существует идеальный тепловой контакт, т.е. заданы граничные условия IV рода.

Математическая модель. Распределение температур в сфере описывается двумерным уравнением теплопроводности:

$$c\rho\frac{\partial T(r,\vartheta,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\lambda}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right],\qquad(1)$$

$0 < r < R0,\quad 0 < \vartheta < \pi$

где с теплоемкость, плотность ρ и теплопроводность λ материала сферы не зависят от температуры.

Распределение температур в затвердевшей оболочке металла имеет вид:

$$C_м\rho_м\frac{\partial T_м(r,\vartheta,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\lambda_м}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial T_м}{\partial r}\right]+\frac{\lambda_м}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial T_м}{\partial\vartheta}\right],\qquad(2)$$

$r > R0,\quad (\vartheta 0 < \vartheta < \pi)$

Пусть точка Рм принадлежит границе плавления (намерзания) затвердевшей оболочки металла. При этом условие движения границы плавления (намерзания) запишем в виде:

$$\alpha_м\left(t_м(r,\vartheta,\tau)-t^м_{пл}\right)-\lambda\frac{\partial t_м(P_м)}{\partial\bar{n}}=-\rho_м Q_м W(P_м);\qquad(3)$$

Распределение температур в затвердевшей оболочке шлака имеет вид:

$$C_ш\rho_ш\frac{\partial T_ш(r,\vartheta,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\lambda_ш}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial T_ш}{\partial r}\right]+\frac{\lambda_ш}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial T_ш}{\partial\vartheta}\right],\qquad(4)$$

$r > R0,\quad (0< \vartheta <\vartheta 0)$

Пусть точка Рш принадлежит границе плавления (намерзания) затвердевшей оболочки шлака. При этом условие движения границы плавления (намерзания) запишем в виде:

$$\alpha_ш\left(t_ш(r,\vartheta,\tau)-t^ш_{пл}\right)-\lambda\frac{\partial t_ш(Pш)}{\partial\bar{n}}=-\rho_ш Q_ш W(P_ш);\ t_ш(P_ш)=t^ш_{пл}\qquad(5)$$

В качестве начального условия выбирается распределение температур в сфере в момент всплытия ее на поверхность металл-шлак.

Алгоритм расчета. При выводе уравнений баланса тепла используется метод контрольного обьема. Для решения задачи формируем координатную сетку. Для этого разобьем половину сферы на контрольные объемы с координатами i,j. Значения температур будем определять в центре контрольных объемов. Задаем M0 – заданное количество узлов по радиусу сферы, N0–заданное количество секторов по углу θ сферы. В предлагаемом алгоритме расчета используется явная разностная схема. Вводятся матрицы температур $t_{i,j}^{n}$ для (n) и $t_{i,j}^{n+1}$ для (n+1) временных слоев, а также матрицы теплофизических параметров плотности $\rho_{i,j}$, теплопроводности $\lambda_{i,j}$ и теплоемкости $c_{i,j}$, куда заносятся на каждом временном слое соответствующие значения параметров материала сферы, затвердевшего металла и затвердевшего шлака. Шаг по радиусу (кординате i) определяется в виде $\Delta r = R_0/(M_0\text{-}1/2)$, шаг по углу θ (по кординате j) определяется в виде $\Delta\theta = \pi / N_0$.

Вывод уравнений баланса тепла для внутренних контрольных обьемов. Вершины сферического сектора указанного на рис.1 имеют координаты:

A(R, φ, θ), B(R, φ, θ+dθ), C(R+dR, φ, θ+dθ), D(R+dR, φ, θ), A1(R, φ+dφ, θ),

B1(R, φ+dφ, θ+dθ), C1(R+ dR, φ+dφ, θ+dθ), D1(R+ dR, φ+dφ, θ)

Для вывода уравнений баланса тепла необходимо вычислить значения площадей граней участвующих в теплообмене и обьем сферического сектора (контрольного обьема) с координатами i,j.

Площадь грани ABA1B1

$$S_{ABA_1B_1} = A \cdot A_1 \cdot AB = \left[\left(R - \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \sin\theta \cdot \Delta\phi\right]\cdot\left(R_0 - \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \Delta\theta =$$

$$= \left[\left(i\cdot\Delta r - \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \sin\theta \cdot \Delta\phi\right]\left(i\cdot\Delta r - \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \Delta\theta = \left[\Delta r\left(i - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \cdot \sin\theta\cdot\Delta\theta\cdot\Delta\phi$$

Площадь грани DC1CD1

$$S_{DCC_1D_1} = DC \cdot DD_1 = \left[\left(R + \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \sin\theta \cdot \Delta\varphi\right]\cdot\left(R + \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \Delta\theta =$$

$$= \left[\left(i\cdot\Delta r - \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \sin\theta \cdot \Delta\varphi\right]\left(i\cdot\Delta r + \frac{\Delta r}{2}\right)\cdot \Delta\theta = \left[\Delta r\left(i + \frac{1}{2}\right)\right]^2 \cdot \sin\theta\cdot\Delta\theta\cdot\Delta\varphi$$

 ISSN 1562-9945

Площадь грани AA1DD1

$$S_{AA_1DD_1} = AA_1 \cdot D_1D = \left[\left(R - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \sin\theta \cdot \Delta\phi\right] \cdot \Delta r =$$

$$= \left[\left(i \cdot \Delta r - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \sin\theta \cdot \Delta\phi\right] \cdot \Delta r = \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta r^2 \cdot \sin\theta \cdot \Delta\phi$$

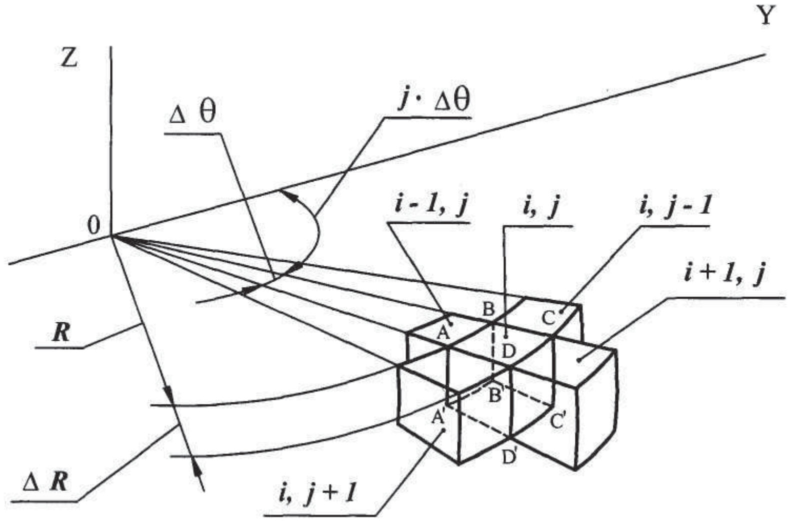

Рисунок 1 - Схема внутренних контрольных объемов сферы 1<i<M0, 1<j<N0

Площадь грани BB1CC1

$$S_{BB_1CC_1} = BB_1 \cdot BC = \left[\left(R - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \sin(\theta \cdot \Delta\theta) \cdot \Delta\varphi\right] \cdot \Delta r =$$

$$= \left[\left(i \cdot \Delta r - \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \sin(\theta \cdot \Delta\theta) \cdot \Delta\varphi\right] \cdot \Delta r = \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta r^2 \cdot \sin(\theta \cdot \Delta\theta) \cdot \Delta\varphi$$

Объем сферического сектора

$$\Delta V = S_{ABA_1B_1} \cdot \Delta r = \left[\Delta r\left(i - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \cdot \Delta r \cdot \sin\theta \cdot \Delta\theta \cdot \Delta\varphi$$

Уравнение баланса тепла для внутренних контрольных объемов.

$$\Delta v \cdot \rho_{i,j} \cdot c_{i,j} \frac{t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^{n}}{\Delta\tau} = S_{ABA_1B_1} \cdot \frac{2\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{i-1,j}}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}} \cdot \frac{t_{i-1,j}^{n} - t_{i,j}^{n}}{\Delta r} -$$

$$-S_{DCC_1D_1} \frac{2\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{i+1,j}}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i+1,j}} \cdot \frac{t_{i,j}^{n} - t_{i+1,j}^{n}}{\Delta r} + S_{AA_1DD_1} \cdot \frac{2\lambda_{i,j-1} \cdot \lambda_{i,j}}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}} \cdot \frac{t_{i,j-1}^{n} - t_{i,j}^{n}}{\Delta\theta} -$$

ISSN 1562-9945

$$-S_{BB_1CC_1}\frac{2\lambda_{i,j}\cdot\lambda_{i,j+1}}{\lambda_{i,j}+\lambda_{i,j+1}}\cdot\frac{t_{i,j}^{n}-t_{i,j+1}^{n}}{i\cdot\Delta r\cdot\Delta\theta} \quad (6)$$

Подставляя значения площадей и объема получим расчетные формулы для неизвестных температур $t_{i,j}^{n+1}$

$$t_{i,j}^{n+1}=t_{i,j}^{n}+\frac{2\cdot\Delta\tau}{\rho_{i,j}\cdot c_{i,j}}\left[\frac{\lambda_{i,j}\cdot\lambda_{i-1,j}}{\lambda_{i,j}+\lambda_{i-1,j}}\cdot\frac{t_{i-1,j}^{n}-t_{i,j}^{n}}{\Delta r^2}-\left(\frac{i+\frac{1}{2}}{i-\frac{1}{2}}\right)^2\cdot\frac{\lambda_{i,j}\cdot\lambda_{i+1,j}}{\lambda_{i,j}+\lambda_{i+1,j}}\cdot\frac{t_{i,j}^{n}-t_{i+1,j}^{n}}{\Delta r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\lambda_{i,j}\cdot\lambda_{i,j-1}}{\lambda_{i,j}+\lambda_{i,j-1}}\cdot\frac{t_{i,j-1}^{n}-t_{i,j}^{n}}{\Delta r^2\cdot\Delta\theta^2}-\frac{\sin(\theta\cdot\Delta\theta)}{\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\lambda_{i,j}\cdot\lambda_{i,j+1}}{\lambda_{i,j}+\lambda_{i,j+1}}\cdot\frac{t_{i,j}^{n}-t_{i,j+1}^{n}}{\Delta r^2\cdot\Delta\theta^2}\right] \quad (7)$$

Аналогичные уравнения выводятся для остальных контрольных объемов расчетной области.

Намерзание и последующее плавление металлической и шлаковой оболочек, плавление сферы. При намерзании и последующем плавлении оболочки металла, шлака и плавлении сферы температура поверхностного слоя принимает значение соответствующей температуры намерзания (плавления). В поверхностном контрольном обьеме с координатами $M[j],j$ может происходить процесс намерзания, плавления шлакового или металлического расплавов, а также плавления сферы. Для этого определяется избыточная температура $t_u(j)$ для каждого поверхностного контрольного обьема.

Расчетные формулы для избыточных температур $t_u(j)$ для $1\le j\le N_0$ при намерзании и плавлении металлического расплава имеют вид:

$$t_u[j]=t_{пл}^{м}+\frac{2\cdot\Delta\tau}{\rho_{M[j],j}\cdot C_{M[j],j}}\left[\frac{\lambda_{M[j]-1,j}\cdot\lambda_{M[j],j}}{\lambda_{M[j]-1,j}+\lambda_{M[j],j}}\cdot\frac{t_{M[j],j}^{n}-t_{пл}^{м}}{\Delta r^2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{M[j]}\right)^2\cdot\alpha_M\frac{t_{пл}^{м}-t_{ж}}{\Delta r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{M[j]}\cdot\frac{\lambda_{M[j],j}\cdot\lambda_{M[j],j-1}}{\lambda_{M[j],j}+\lambda_{M[j],j-1}}\cdot\frac{t_{M[j],j-1}^{n}-t_{пл}^{м}}{\left[M[j]\cdot\Delta r\cdot\Delta\theta\right]^2}-\frac{1}{M[j]}\cdot\frac{\lambda_{M[j],j}\cdot\lambda_{M[j],j+1}}{\lambda_{M[j],j}+\lambda_{M[j],j-1}+}\cdot\frac{t_{пл}^{м}-t_{M[j],j+1}^{n}}{\left[M[j]\cdot\Delta r\cdot\Delta\theta\right]^2}\right] \quad (8)$$

Если значение избыточной температуры $t_u(j)$ меньше температуры плавления металла $t_{пл}^{м}$, то в соседнем поверхностном контрольном объеме с координатами $M[j],j+1$ происходит процесс намерзания металла. При этом, на каждом расчетном временном слое разность между значением избыточной температурой и температурой плавления металла $t_{пл}^{м}$ суммируется в счетчиках. Для этих целей введен массив cd[j], в начале расчета его элементы равны 0. Если через k1 шагов по времени значение cd[j] станет больше отношения теплоты фазового перехода в металле к его теплоемкости, то температура металлического расплава в соседнем поверхностном контрольном объеме $t_{M[j],j+1}^{n}$ заменяется на температуру плавления металла $t_{пл}^{м}$.

Если значение избыточной температуры $t_{u}(j)$ больше температуры плавления металла $t_{пл}^{м}$, то данный поверхностный контрольный обьем с координатами $M[j],j$ расплавляется. При этом, на каждом расчетном временном слое разность между значением избыточной температуры и температуры плавления металла $t_{пл}^{м}$ также суммируется в счетчиках. По истечении k2 шагов по времени значение cd[j] станет больше отношения теплоты фазового перехода в металле к его теплоемкости, то температура $t_{M[j],j}^{n}$ в данном контрольном объеме заменяется на температуру металлического расплава $t_{ж}$. Аналогично производится расчет процесса намерзания и последующего плавления шлаковой оболочки.

После расплавления металлической или шлаковой оболочки производится расчет подогрева поверхности сферы в данном контрольном обьеме. В дальнейшем производится расчет плавления сферы. Расчет по данному алгоритму заканчивается при условии, что все контрольные обьемы, омываемые металлом, расплавились.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлюченков И.А. Численное моделирование (на основе метода Дюзимбера) процессов плавления тел в расплаве // Математичне моделювання. – № 2, 1997. – С. 37 - 43.
2. Бабенко М.В., Павлюченков И.А. Алгоритм расчета (на основе метода Дюзимбера) двухмерной задачи плавления цилиндра в расплаве. Металургійна теплотехніка: Збірник наукових праць Національної металургійної академії України. - Дніпропетровськ: «ПП Грек О.С.», 2006. с. 3-7.

Получено 29.04.2010г.