

УДК 536:669.02.09:669.054.82:005

И.А. Павлюченков, Р.В. Волошин, Е.В. Сало, Т.Н. Овчаренко  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ПЛАВЛЕНИЯ  
ТУГОПЛАВКИХ МАТЕРИАЛОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ НА  
ГРАНИЦЕ ШЛАК – МЕТАЛЛ**

*Анотація. Метою запропонованої (наведеної) статті є розробка алгоритмів двовимірних задач розрахунку (на основі методу Дюзимбера) кінетики плавлення кускових матеріалів в розплаві циліндричної форми при несиметричних граничних умовах. В роботі приведено математичне моделювання кінетики плавлення тугоплавких матеріалів (температура плавлення матеріалу вище температури тверднення розплаву і нижче температури розплаву) на міжфазній границі шлак-метал.*

**Введение.** Ввод кусковых материалов различного химического и гранулометрического состава в жидкую сталь в сталеразливочном ковше в процессе выпуска либо гомогенизирующей продувки расплава является эффективной ресурсосберегающей технологией внепечного раскисления, рафинирования, микролегирования и доводки по химическому составу стали. Задачи исследования тепломассообменных процессов при плавлении добавок на границе шлак-металл в сталеразливочном ковше при внепечной обработке металла актуальны для металлургической практики.

**Постановка задачи.** Для решения задач теплопроводности с подвижными границами раздела фаз применяются, как правило, численные методы. Наиболее универсальным методом расчета является метод конечных разностей. Это эффективна схема, основанная на учете скрытой теплоты плавления по методу Дюзимбера [1]. Метод был применен в одномерной постановке при решении задачи плавления чушкового алюминия при раскислении и доводке стали в сталеразливочном ковше [2], а также для исследования кинетики плавления алюминиевой и порошковой проволоки при вводе в жидкую сталь [3, 4]. Данный метод был применен также при решении двухмерной задачи плавления алюминиевого стержня (продольное обтекание цилиндра) с защитным

---

© Павлюченков И.А., Волошин Р.В., Сало Е.В., Овчаренко Т.Н., 2010

покрытием [5]. Целью статьи является разработка алгоритмов двухмерных задач расчета (на основе метода Дюзимбера) кинетики плавления кусковых материалов в расплаве цилиндрической формы при несимметричных граничных условиях.

**Алгоритм.** Рассмотрим процесс плавления цилиндра из тугоплавкого материала, который расположен на границе шлак-металл. Принимаем, что температуры жидкого металла  $t_m$  и жидкого шлака  $t_{ш}$  постоянны и выше температуры  $t_{пл}$  плавления цилиндра. Принимаем также, что перед всплытием на границу шлак-металл вся поверхность цилиндра не имеет намерзших оболочек шлака и металла.

Распределение температур в цилиндре описывается двумерным уравнением теплопроводности:

$$C(T)\rho(T)\frac{\partial T(r, \vartheta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right], \quad (1)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \vartheta < \pi$$

где  $T$  – температура, °С;  $r, \vartheta$  – текущие значения радиуса и угла соответственно;  $\rho(T), C(T), \lambda(T)$  – плотность, теплоемкость, теплопроводность материала цилиндра. Граничные условия. На оси симметрии поперечного сечения цилиндра тепловой поток равен 0, то есть:

$$\frac{\partial t(0, z, \tau)}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

На верхней боковой поверхности цилиндра ( $0 < \vartheta < \vartheta_0$ ) происходит конвективный теплообмен с жидким шлаком с заданным коэффициентом  $\alpha_{ш}$  теплоотдачи. На нижней боковой поверхности цилиндра ( $\vartheta_0 < \vartheta < \pi$ ) происходит конвективный теплообмен с жидким расплавом с заданным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_m$ . Между намерзшими оболочками металла, шлака и поверхностью цилиндра существует идеальный тепловой контакт, т.е. заданы граничные условия IV рода.

Распределение температур в затвердевшей оболочке металла имеет вид:

$$C_m(T)\rho_m(T)\frac{\partial T_m}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda_m(T)r \frac{\partial T_m}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \lambda_m(T) \frac{\partial T_m}{\partial \vartheta} \right], \quad (3)$$

$$r > R_0, \quad (90 < \vartheta < \pi)$$

Пусть точка  $P_m$  принадлежит границе плавления (намерзания) затвердевшей оболочки металла. При этом условие движения границы плавления (намерзания) запишем в виде:

$$\alpha_m (T_m(r, \vartheta, \tau) - t_{nl}^m) - \lambda_m \frac{\partial T_m(P_m)}{\partial \bar{n}} = -\rho_m Q_m W(P_m); T(P_m) = t_{nl}^m; \quad (4)$$

Распределение температур в затвердевшей оболочке шлака описывается аналогичным уравнением теплопроводности:

$$C_w(T) \rho_w(T) \frac{\partial T_w}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda_w(T) r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \lambda_w(T) \frac{\partial T_w}{\partial \vartheta} \right], \quad (5)$$

$$r > R_0, \quad (0 < \vartheta < 90)$$

Пусть точка  $P_w$  принадлежит границе плавления (намерзания) затвердевшей оболочке шлака. При этом условие движения границы плавления (намерзания) запишем в виде:

$$\alpha_w (T_w(r, \vartheta, \tau) - t_{nl}^w) - \lambda_w \frac{\partial T_w(P_w)}{\partial \bar{n}} = -\rho_w Q_w W(P_w); T(P_w) = t_{nl}^w; \quad (6)$$

После завершения периодов намерзания и последующего плавления металлической или шлаковой оболочек происходит подогрев поверхности цилиндра до температуры его плавления  $t_{пл}$ . На нижней поверхности цилиндра ( $90 < \vartheta < \pi$ ) происходит конвективный теплообмен с жидким металлом с заданным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_m$ :

$$\alpha_m [t_m - T(R_0, \vartheta, \tau)] = -\lambda \frac{\partial T(R_0, \vartheta, \tau)}{\partial \bar{n}}, \quad (90 < \vartheta < \pi) \quad (7)$$

На верхней поверхности цилиндра ( $0 < \vartheta < 90$ ) происходит конвективный теплообмен с жидким шлаком с заданным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_w$ :

$$\alpha_w [t_w - T(R_0, \vartheta, \tau)] = -\lambda \frac{\partial T(R_0, \vartheta, \tau)}{\partial \bar{n}}, \quad (0 < \vartheta < 90) \quad (8)$$

В качестве начального условия выбирается распределение температур в цилиндре в момент всплытия его на поверхность шлак-металл.

В качестве расчетной области выбрана половина поперечного сечения цилиндра, для решения задачи формируем квадратную координатную сетку. Для этого разобьем рассматриваемую половину сечения вертикальными и горизонтальными линиями как это показано на (рис. 1), получили контрольные объемы с координатами  $i, j$ . Значения температур будем определять в центре контрольных объемов. Задаем  $M_0$  – начальное количество узлов по радиусу. В предполагаемом алгоритме расчета используется явная разностная схема.

Вводятся матрицы температур  $t_{i,j}^n$  и  $t_{i,j}^{n+1}$  для  $(n)$  и  $(n+1)$  временных слоев.

Для учета условия симметрии задаем дополнительный столбец температур  $t_{1,j}^n$ . Равенство 0 тепловых потоков на оси симметрии учитывается посредством присвоения на каждом временном слое значений температур соответствующих столбцов:  $t_{1,j}^n = t_{2,j}^n$ . В результате такого подхода все контрольные объемы расчетной области являются внутренними, что существенно упрощает составление программы расчета.

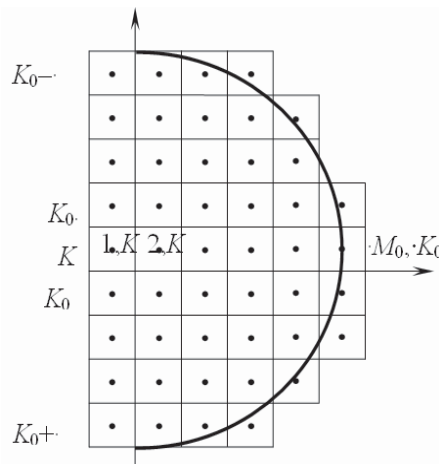


Рисунок 1 – Расчетная область к задаче плавления цилиндра, который расположен на границе шлак-металл

Вводятся матрицы теплофизических параметров плотности  $\rho_{i,j}^n$ , теплопроводности  $\lambda_{i,j}^n$  и теплоемкости  $c_{i,j}^n$ , куда заносятся на каждом временном слое соответствующие значения параметров материала цилиндра и затвердевшего металла в зависимости от температуры.

В данной задаче используется только одно обобщенное уравнение для расчета температур на “n+1” временном слое. Оно имеет следующий вид:

$$t_{i,j}^{n+1} = t_{i,j}^n + r_z (t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n) - r_v (t_{i,j}^n - t_{i+1,j}^n) + r_s (t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n) - r_j (t_{i,j}^n - t_{i,j+1}^n) \quad (9)$$

Значение коэффициента  $r_z$  ( $z$  – ”запад”) определяется по формуле:

$$r_z = \frac{\Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i,j}^n} + \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i-1,j}^n} \right)}. \quad (10)$$

Значение коэффициента  $r_v$  ( $v$  – ”восток”) определяется в зависимости от значения температуры в контрольном объеме с номером  $t_{i+1,j}^n$ :

$$r_v = \frac{\alpha \cdot \Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \Delta x}, \quad t_{i+1,j}^n = t_{\text{ж}} \quad (11)$$

$$r_v = \frac{\Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i,j}^n} + \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i+1,j}^n} \right)}, \quad t_{i+1,j}^n \neq t_{\text{ж}} \quad (12)$$

Значение коэффициента  $r_s$  ( $s$  – ”север”) определяется в зависимости от значения температуры в контрольном объеме с номером  $t_{i,j-1}^n$ :

$$r_s = \frac{\alpha \cdot \Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \Delta x}, \quad t_{i,j-1}^n = t_{\text{ж}} \quad (13)$$

$$r_s = \frac{\Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i,j-1}^n} + \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i,j}^n} \right)}, \quad t_{i,j-1}^n \neq t_{\text{ж}} \quad (14)$$

Значение  $r_j$  ( $j$  – ”юг”) определяется в зависимости от температуры в контрольном объеме с номером  $t_{i,j+1}^n$ :

$$r_j = \frac{\alpha \cdot \Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \Delta x}, \quad t_{i,j+1}^n = t_{\text{ж}} \quad (15)$$

$$r_j = \frac{\Delta \tau}{\rho_{i,j}^n \cdot c_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i,j}^n} + \frac{\Delta x^2}{2\lambda_{i,j+1}^n} \right)}, \quad t_{i,j+1}^n \neq t_{ж}^n \quad (16)$$

Если контрольный объем с нижней, верхней и правой сторон обтекаются расплавом, то  $gv$ ,  $gs$  и  $gj$  определяются по формулам (11), (13) и (15) соответственно.

Второе слагаемое в правой части уравнения (9) обозначает приток тепла посредством теплопроводности с левого соседнего контрольного объема с координатами  $t_{i-1,j}^n$  в контрольный объем с координатами  $t_{i,j}^n$ .

Третье слагаемое обозначает поток тепла ушедшего с контрольного объема с координатами  $t_{i,j}^n$  в правый соседний контрольный объем с координатами  $t_{i+1,j}^n$ . При этом возможен один из 2 способов переноса тепла:

- 1) теплопроводностью, если  $t_{i+1,j}^n$  меньше температуры расплава, значение  $gv$  при этом определяется по формуле (12);
- 2) конвективным теплообменом с расплавом, если  $t_{i+1,j}^n$  равна температуре расплава, значение  $gv$  при этом определяется по формуле (15).

Четвертое слагаемое в правой части уравнения (9) обозначает приток тепла с верхнего соседнего контрольного объема с координатами  $t_{i,j-1}^n$  в контрольный объем с координатами  $t_{i,j}^n$ . При этом также возможен один из двух способов переноса тепла:

- 1) теплопроводностью, если  $t_{i,j-1}^n$  меньше температуры расплава, значение  $gv$  при этом определяется по формуле (14);
- 2) конвективным теплообменом с расплавом, если  $t_{i,j-1}^n$  равна температуре расплава, значение  $gv$  при этом определяется по формуле (13).

Пятое слагаемое обозначает поток тепла, ушедшего с контрольного объема с координатами  $t_{i,j}^n$  в нижний соседний контрольный объем с координатами  $t_{i,j+1}^n$ . При этом возможен один из 2 способов переноса тепла:

1) теплопроводностью, если  $t_{i,j+1}^n$  меньше температуры расплава, значение  $r_j$  при этом определяется по формуле (16);

2) конвективным теплообменом с расплавом, если  $t_{i,j+1}^n$  равна температуре расплава, значение  $r_j$  при этом определяется по формуле (15).

Согласно метода Дюзимбера при намерзании и последующем плавлении оболочки металла и плавлении цилиндра температура поверхностного слоя принимает значение соответствующей температуры плавления (намерзания), т.е. расчет поля температур по формулам (9 – 16) производится с граничными условиями I рода.

Для расчета процесса намерзания и последующего плавления металлической оболочки вычисляется, согласно метода Дюзимбера, избыточная температура:

$$t_u = t_v + r_z(t_{i-1,j}^n - t_v) - r_v(t_v - t_{i+1,j}^n) + r_s(t_{i,j-1}^n - t_v) - r_j(t_v - t_{i,j+1}^n), \quad (17)$$

где  $t_v$  - температура нулевой жидкотекучести (выливаемости) металла

Если значение избыточной температуры  $t_u$  меньше температуры нулевой жидкотекучести металла  $t_v$ , то на данном временном слое происходит процесс намерзания металла. При этом, разность между значением избыточной температуры и температурой нулевой жидкотекучести металла  $t_v$  суммируется в счетчиках. Для этих целей введена матрица  $cd[i, j]$ , в начале расчета ее элементы равны 0. Если через  $k_1$  шагов по времени значение  $cd[i, j]$  станет больше отношения теплоты фазового перехода в металле к его теплоемкости, то температура расплава в соседнем контрольный объеме заменяется на температуру нулевой жидкотекучести металла.

Если значение избыточной температуры  $t_u$  больше температуры нулевой жидкотекучести металла  $t_v$ , то на данном временном слое происходит процесс расплавления намерзшего металла. При этом, разность между значением избыточной температуры и температуры нулевой жидкотекучести металла  $t_v$  суммируется в счетчиках. По истечении  $k_2$  шагов по времени значение  $cd[i, j]$  станет больше отношения теплоты фазового перехода в металле к его теплоемкости, то температура  $t_{i,j}^n$  в контрольный объеме заменяется на температуру расплава.

Аналогично, для расчета процесса намерзания и последующего плавления шлаковой оболочки вычисляется, согласно метода Дюзимбера, избыточная температура:

$$t_u = t_{nl}^{uu} + r_z(t_{i-1,j}^n - t_{nl}^{uu}) - r_v(t_{nl}^{uu} - t_{i+1,j}^n) + r_s(t_{i,j-1}^n - t_{nl}^{uu}) - r_j(t_{nl}^{uu} - t_{i,j+1}^n), \quad (18)$$

где  $t_{nl}^{uu}$  - температура плавления шлака

Если значение избыточной температуры  $t_u$  меньше температуры плавления шлака  $t_{nl}^{uu}$ , то на данном временном слое происходит процесс намерзания шлака. При этом, разность между значением избыточной температуры и температуры плавления шлака  $t_{nl}^{uu}$  суммируется в счетчиках. Если через  $k3$  шагов по времени значение  $cd[i, j]$  станет больше отношения теплоты плавления в шлаке к его теплоемкости, то температура расплава в соседнем контрольный объеме заменяется на температуру плавления шлака  $t_{nl}^{uu}$ .

Если значение избыточной температуры  $t_u$  больше температуры плавления шлака  $t_{nl}^{uu}$ , то на данном временном слое происходит процесс расплавления намерзшего шлака. При этом, разность между значением избыточной температуры и температуры плавления шлака  $t_{nl}^{uu}$  суммируется в счетчиках. По истечении  $k4$  шагов по времени значение  $cd[i, j]$  станет больше отношения теплоты плавления шлака к его теплоемкости, то температура  $t_{i,j}^n$  в контрольный объеме заменяется на температуру шлакового расплава. Расчет по формулам (9–18) осуществляется для контрольных объемов, температура которых ниже температуры плавления цилиндра. После расчета процесса подогрева цилиндра на данном временном слое производится расчет плавления контрольных объемов в цилиндре, которые прогрелись до температуры плавления. Для каждого контрольного объема, имеющего температуру плавления цилиндра  $t_{пл.}$ , вычисляется избыточная температура:

$$t_u = t_{nl} + r_z(t_{i-1,j}^n - t_{nl}) - r_v(t_{nl} - t_{i+1,j}^n) + r_s(t_{i,j-1}^n - t_{nl}) - r_j(t_{nl} - t_{i,j+1}^n), \quad (19)$$

При этом, разность между значением избыточной температуры и температурой плавления цилиндра суммируется в счетчиках. По истечении  $k5$  шагов по времени значение  $cd[i, j]$  станет больше отношения теплоты фазового перехода в цилиндре к его



теплоемкости, то температура  $t_{i,j}^n$  в контрольный объем заменяется на температуру шлакового или металлического расплава. Расчет по данному алгоритму заканчивается при условии, что все контрольные объемы расплавились. Для расчетов использовались общие физические данные для добавки (материал добавки ФТи 30.), расплава и шлака, расчет коэффициента теплоотдачи в шлаковом расплаве [7].

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Диаметр цилиндра, мм	5	25	50
Длительность плавления на границе шлак-металл, сек	5	51	145
Длительность плавления в металлическом расплаве, сек	4	46	140

**Выводы.** Адекватность предложенного алгоритма расчета подтверждается сравнением результатов вычислительного эксперимента с ранее опубликованными экспериментальными и расчетными результатами одномерных задач плавления для различных материалов. Результаты вычислительного эксперимента позволяют установить рациональные режимы ввода кусковых добавок из различных материалов, обеспечивающие наиболее благоприятные условия для их расплавления в сталеразливочном ковше или ковше-печи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Павлюченков И.А. Численное моделирование (на основе метода Дюзимбера) процессов плавления тел в расплаве // Математичне моделювання.-1997.-№2 С. 37 - 43.
2. Моделирование процесса плавления чушкового алюминия при раскислении и доводке стали в ковше/ В.А. Вихлевщук, К.Г Носов., В.Ф Поляков.[и др.]//Изв. вузов.Черная металлургия.-1988-№9-С.31-34.
3. Исследование процесса плавления алюминиевой проволоки при вводе в сталь. В.А. Вихлевщук, И.А. Павлюченков, В.Г.Щербинский [и др.] // Изв. вузов. Черная металлургия.-1988.-№2.-С.32-38.
4. Исследование кинетики плавления порошковой проволоки при вводе в жидкую сталь / И.А. Павлюченков, В.А. Вихлевщук, В.И. Тимошпольский.[и др.] // Изв. вузов.Энергетика.-1992.-№9-10.-С.87-91.
5. Бабенко М.В Алгоритм расчета (на основе метода Дюзимбера) двухмерной задачи плавления цилиндра в расплаве / М.В Бабенко, И.А. Павлюченков // Металургійна теплотехніка: Зб. наук. праць Національної металургійної академії України. - Дніпропетровськ: ПП Грек О.С., 2006.С. 3-7.
6. Изучение свойств ферросплавов и лигатур для микролегирования и раскисления стали / В.С.Игнатьев, В.А.Вихлевщук, В.М.Черногрицкий, [и др.] //Изв. вузов. Черная металлургия.-1988.-№6.-С.37-42.
7. Ефимов В.А. Разливка и кристаллизация стали. -М: Металлургия, 1976.-552с.