УДК 519.24:681

В.П. Малайчук, Н.А. Лысенко, А.В. Кошулян

КОНТРОЛЬ ОБЪЕКТОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проведено исследование принятия ошибочных решений 1-го и 2-го рода о состоянии технических объектов, контролируемые параметры которых являются случайными величинами, измеряются с ошибками и не должны выходить за пределы интервала допуска.

Ключевые слова: контроль, случайные параметры, ошибки 1-го и 2-го рода, интервал допуска.

Постановка задачи

Теоретической базой формирования решающих правил контроля состояния технических объектов по результатам измерений их параметров является статистическая теория распознавания. Предполагается, что известны вероятности и параметры, характеризующие их состояния, известны законы распределения вероятностей измерений, выбраны стоимости принятия ошибочных решений. На основе этих знаний определяются оптимальные алгоритмы обработки измерений проконтролированных объектов и формируются решающие правила [1].

Рассмотрим задачу контроля однотипных объектов, у которых измеряемые информативные параметры, характеризующие их состояния, являются случайными величинами со своими статистическими закономерностями. Их случайность порождается нестабильностью технологических процессов производства и неконтролируемыми изменениями окружающей среды. Статистические закономерности описываются плотностью распределения вероятностей $W(H)$ информативного параметра H и условной плотностью $W(\bar{x}/H)$ его оценки $\bar{x}$ по выборке измерений $x_1, x_2, ..., x_m$. Объект контроля считается в норме, если информативный параметр не выходит за пределы допуска в интервале $H_1 \le H \le H_2$. По результатам контроля решение о том, что состояние объекта в норме принимается, если оценка $\bar{x}$ информативного параметра удовлетворяет условию $H_1^* \le \bar{x} \le H_2^*$, где пороги сравнения H_1^* и H_2^*

 ISSN 1562-9945

выбираются из условия минимума математического ожидания стоимости принятия ошибочных решений

$$M[C] = C\left(N\overline{N}^*\right)P\left(N\overline{N}^*\right) + C\left(\overline{N}N^*\right)P\left(\overline{N}N^*\right), \qquad (1)$$

где $C\left(N\overline{N}^*\right)$ и $C\left(\overline{N}N^*\right)$ стоимости ошибочных решений (изделие в норме N принимается за брак $\overline{N}^*$ и бракованное изделие $\overline{N}$ принимается за нормальное N^*), $P\left(N\overline{N}^*\right)$ и $P\left(\overline{N}N^*\right)$ вероятности этих сложных событий.

Ожидаемая стоимость принятия ошибочных решений о состоянии объектов контроля зависит от объема измерений контролируемого параметра, допусков качества H_1 и H_2 и неизвестных порогов сравнения H_1^* и H_2^*. Будем считать, что модели статистических закономерностей $W(H)$ и $W(\overline{x}/H)$ известны. Исследуем влияние порогов H_1^* и H_2^* на вероятности принятия ошибочных решений.

Основная часть

Ошибочные решения $N\overline{N}^*$ (перебраковка) и $\overline{N}N^*$ (пропуск брака) являются сложными случайными событиями. Их вероятности равны

$$P\left(N\overline{N}^*\right) = P(N)P\left(\overline{N}^*/N\right) = P(N)\left[1 - P\left(N^*/N\right)\right] = P(N) - P\left(NN^*\right), \qquad (2)$$

$$P\left(\overline{N}N^*\right) = P\left(N^*\right)P\left(\overline{N}/N^*\right) = P\left(N^*\right)\left[1 - P\left(N/N^*\right)\right] = P\left(N^*\right) - P\left(NN^*\right). \qquad (3)$$

Вероятность поступления на контроль объекта в норме $P(N)$ и вероятность принятия решения, что проконтролированные объекты находятся в норме $P\left(N^*\right)$, равны

$$P(N) = \int_{H_1}^{H_2} W(H)dH\,, \qquad (4)$$

$$P\left(N^*\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{H^*_1}^{H^*_2} W(H)W(\overline{x}/H)d\overline{x}dH = \int_{H^*_1}^{H^*_2} W(\overline{x})d\overline{x}\,. \qquad (5)$$

Вероятность $P(N)$ характеризует эффективность технологии производства, так как $P(Б) = 1 - P(N)$ - это вероятность брака. Вероятность $P\left(N^*\right)$ зависит от порогов сравнения H_1^* и H_2^* и точности измерений контролируемого параметра (дисперсия σ_x^2) и косвенно характеризует эффективность контроля.

Вероятность принятия правильного решения $P\left(NN^*\right)$ определяется по формуле

$$P\left(NN^*\right)=\int\limits_{H_1}^{H_2}\int\limits_{H_1^*}^{H_2^*}W(H)W(\bar{x}/H)d\bar{x}dH. \tag{6}$$

Если принять, что распределения $W(H)$ и $W(\bar{x}/H)$ гауссовы, их математические ожидания $M[H]=H_T$, $M[\bar{x}/H]=H$ и дисперсии $D[H]=\sigma_T^2$, $D[\bar{x}/H]=\sigma_x^2$ известны, то $M[\bar{x}]=H_T$, $D[\bar{x}]=\sigma_x^2+\sigma_T^2$ и для вероятностей $P(N)$, $P\left(N^*\right)$, $P\left(NN^*\right)$ получим расчетные формулы

$$P(N)=\int\limits_{H_1}^{H_2}W(H)dH=\Phi\left(\frac{H_2-H_T}{\sigma_T}\right)-\Phi\left(\frac{H_1-H_T}{\sigma_T}\right), \tag{7}$$

$$P\left(N^*\right)=\Phi\left(\frac{H_2^*-H_T}{\sqrt{\sigma_T^2+\sigma_x^2}}\right)-\Phi\left(\frac{H_1^*-H_T}{\sqrt{\sigma_T^2+\sigma_x^2}}\right), \tag{8}$$

$$P\left(NN^*\right)=\frac{1}{\sigma_T\sqrt{2\pi}}\int\limits_{H_1}^{H_2}\left[\mathit{\Phi}\left(\frac{H_2^*-H}{\sigma_x}\right)-\mathit{\Phi}\left(\frac{H_1^*-H}{\sigma_x}\right)\right]\exp\left(\frac{\left(H-H_T\right)^2}{2\sigma_T{}^2}\right)dH, \tag{9}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - интеграл вероятности Гаусса.

Введем обозначения $\Delta H_1=H_T-H_1$, $\Delta H_2=H_2-H_T$, $\Delta x_1=H_T-H_1^*$, $\Delta x_2=H_2^*-H_T$ и преобразуем выражения (7), (8), (9) следующим образом

$$P(N)=\Phi\left(\frac{\Delta H_2}{\sigma_T}\right)-\Phi\left(\frac{-\Delta H_1}{\sigma_T}\right)=\Phi\left(\frac{\Delta H_2}{\sigma_T}\right)+\Phi\left(\frac{\Delta H_1}{\sigma_T}\right)-1, \tag{10}$$

$$P\left(N^*\right)=\Phi\left(\frac{\Delta x_2}{\sqrt{\sigma_T^2+\sigma_x^2}}\right)-\Phi\left(\frac{-\Delta x_1}{\sqrt{\sigma_T^2+\sigma_x^2}}\right)=\Phi\left(\frac{\Delta x_2}{\sqrt{\sigma_T^2+\sigma_x^2}}\right)+\Phi\left(\frac{\Delta x_1}{\sqrt{\sigma_T^2+\sigma_x^2}}\right)-1, \tag{11}$$

$$P\left(NN^*\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\Delta H_1/\sigma_T}^{\Delta H_2/\sigma_T}\left[\mathit{\Phi}\left(\frac{z\sigma_T+\Delta x_1}{\sigma_x}\right)-\mathit{\Phi}\left(\frac{z\sigma_T-\Delta x_2}{\sigma_x}\right)\right]e^{-\frac{z^2}{2}}dz \tag{12}$$

Исследуем частный случай контроля, когда $\Delta H_1=\Delta H_2=\Delta H$ и $\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x$ (симметричные законы распределения вероятностей контролируемых параметров и их оценок). Выражения (10), (11), (12) запишутся в виде

 ISSN 1562-9945

$$P(N) = 2\Phi\left(\frac{\Delta H}{\sigma_T}\right) - 1, \qquad P\left(N^*\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_x^2}}\right) - 1, \tag{13}$$

$$P\left(NN^*\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta H / \sigma_T} \left[\Phi\left(\frac{z\sigma_T + \Delta x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{z\sigma_T - \Delta x}{\sigma_x}\right) \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{14}$$

Вероятности ошибочных решений вычислим по формулам (2) и (3).

Представим (13), (14) в следующем виде

$$P(N) = 2\Phi\left(\frac{\Delta H}{\sigma_T}\right) - 1, \qquad P\left(N^*\right) = 2\Phi\left(\frac{\frac{\Delta x - \Delta H}{\sigma_T} + \frac{\Delta H}{\sigma_T}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_T}\right)^2}}\right) - 1, \tag{15}$$

$$P\left(NN^*\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta H / \sigma_T} \left[\Phi\left(\frac{z + \frac{\Delta x - \Delta H}{\sigma_T} + \frac{\Delta H}{\sigma_T}}{\frac{\sigma_x}{\sigma_T}}\right) - \Phi\left(\frac{z - \frac{\Delta x - \Delta H}{\sigma_T} - \frac{\Delta H}{\sigma_T}}{\frac{\sigma_x}{\sigma_T}}\right) \right] e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{16}$$

Построим зависимости вероятности ошибочных решений от разности $\frac{\Delta x - \Delta H}{\sigma_T}$. На рис.1 показаны эти графики для различных отношений σ_x / σ_T и двух вероятностей $P(N)$=0.9 и $P(N)$=0.95, характеризующих качество производства. Проанализируем полученные результаты. Если обозначить $\frac{\Delta x - \Delta H}{\sigma_T} = v$, то пороги сравнения H_1^* и H_2^* можно определить по формулам

$$H_2^* = H_2 + v\sigma_T; \qquad H_1^* = H_1 - v\sigma_T. \tag{17}$$

Из анализа графиков на рис.1 следуют такие выводы:

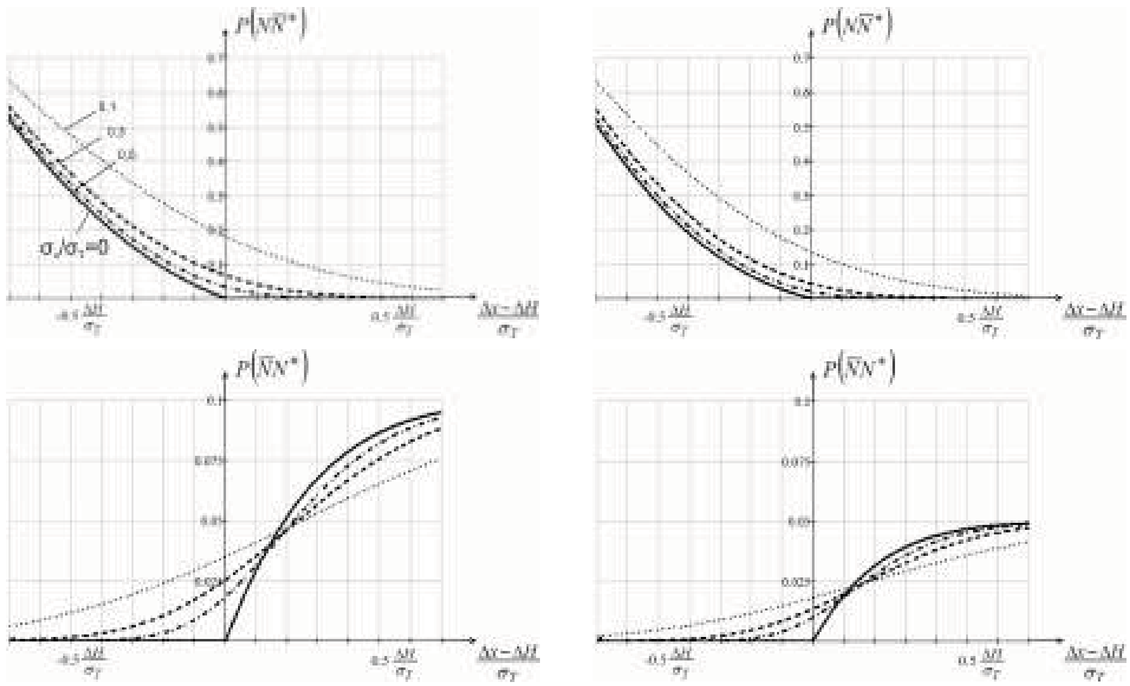
1) если v<0, то вероятность перебраковки значительно превышает вероятность пропуска брака $P\left(N\overline{N}^*\right) > P\left(\overline{N}N^*\right)$;

2) если v > 0, то имеет место обратное неравенство $P\left(N\overline{N}^*\right) < P\left(\overline{N}N^*\right)$.

Из выражений (2) и (3) с учетом (13) будем иметь формулу для анализа разности вероятностей ошибочных решений

$$\Delta P = P\left(N\overline{N}^*\right) - P\left(\overline{N}N^*\right) = 2\left[\Phi\left(\frac{\Delta H}{\sigma_T}\right) - \Phi\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_x^2}}\right)\right]. \tag{18}$$

Если разность ΔP задана, то можно определить $\Delta x = H_T - H_1^* = H_2^* - H_T$ и пороги сравнения H_1^* и H_2^*, при которых будет иметь место неравенство $P\left(N\overline{N}^*\right) > P\left(\overline{N}N^*\right)$ как возможный показатель эффективности контроля.



а) б)

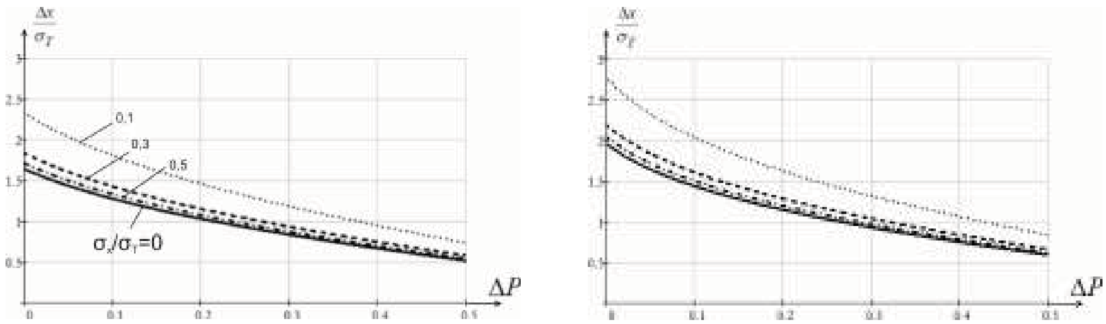
Рисунок 1 - Вероятности принятия ошибочных решений в зависимости от выбора величины порога Δx; а) $P(N)$=0.9; б) $P(N)$=0.95

Если воспользоваться известной аппроксимацией обратной функции распределения Гаусса в виде[2] $\Psi(P) = 4{,}91\left(P^{0,14} - (1-P)^{0,14}\right)$, то для оценки $\Delta x / \sigma_T$ получим формулу

$$\frac{\Delta x}{\sigma_T} = 4{,}91\sqrt{1 + \frac{\sigma_x{}^2}{\sigma_T{}^2}}\left[\left(\frac{1 + \left(P(N) - \Delta P\right)}{2}\right)^{0,14} - \left(\frac{1 - \left(P(N) - \Delta P\right)}{2}\right)^{0,14}\right]. \qquad (19)$$

На рис.2 представлены графики для определения $\Delta x / \sigma_T$, если заданы $P(N)$, $\sigma_x{}^2 / \sigma_T{}^2$ и ΔP.

 ISSN 1562-9945



а) б)

Рисунок 2 - Графики для оценки порогов сравнения H_1^* и H_2^*;

а) $P(N)$=0.9; б) $P(N)$=0.95

Выводы и направления дальнейших исследований

1. Исследованы вероятности принятия ошибочных решений контроля в зависимости от выбора значений порогов, по которым принимаются решение о состоянии объектов со случайными параметрами. Эти знания позволяют обосновано выбирать пороги сравнения по заданным значениям разностей вероятностей принятия ошибочных решений.

2. Учитывая, что плата за пропуск бракованных изделий значительно превышает плату за перебраковку, пороги сравнения должны выбираться из условия $P\left(\overline{N}N^*\right) << P\left(N\overline{N}^*\right)$ и при этом должны учитываться ошибки измерения неконтролируемого параметра.

3. Оптимальные значения порогов сравнения могут быть получены из условия минимума стоимости принятия ошибочных решений, т.е. по критерию минимума среднего риска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малайчук, В.П. Математическая дефектоскопия: Монография / В.П.Малайчук, А.В.Мозговой.-Д.:Системные технологии, 2005. - 180 с.
2. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика/ А.И.Кобзарь.–М.:Физматлит, 2006.– 816 с.