

УДК 530.1

А.О. Горбонос, О.І. Михальов

**МОДЕЛЬ ПЕНРОУЗА ЯК ОСНОВА ДЛЯ ПОБУДОВИ
ФРАКТАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ КВАЗІКРИСТАЛІВ**

На сьогодні велику розповсюдженість отримала теорія квазікристалів. Квазікристал уявляє собою структуру, що не схожа ні на впорядковані кристали, ні на аморфні тіла. Основні властивості квазікристалів добре описує модель Пенроуза. Тому доцільне побудування фрактальної поверхні на основі мозаїки Пенроуза. Для побудови мозаїки Пенроуза використовується важлива властивість фракталів – самоподібність.

На сьогодні велику розповсюдженість отримала теорія квазікристалів. Квазікристал уявляє собою структуру, що не схожа ні на впорядковані кристали, ні на аморфні тіла. Квазікристал відрізняється від інших речовин незвичайною симетрією. Дослідження квазікристалів об'єднали дві теоретичні області – теорію металевих стекол та математичну теорію замощення. У результаті чого з'явився інструмент для вивчення металевих сплавів.

Структура квазікристалічних матеріалів, як відомо [1,3], має властивість масштабної самоподібності, тобто властивість фрактальності.

Фрактал - це нескінченно самоподібна геометрична фігура, кожен фрагмент якої повторюється при зменшенні масштабу [4,5,6]. Фрактал (від лат. fractus – створений з фрагментів) - поняття, що виникло в кінці 70-х років завдяки роботам Б. Мандельброта ("The Fractal Geometry of Nature", 1977). Згідно до його власного визначення, фрактал - це структура, що складається з частин, які подібні цілому. Тобто, при розгляді фрактала, можливо побачити деякий набір елементів, що залишаються незмінними незалежно від масштабу. В той же час, більшість регулярних об'єктів втрачають деталі, коли їх наближають для більш пильного розгляду. Дійсні фрактали є результатом деякого нескінченно повторюваного процесу. Друга властивість, що характеризує фрактали, це дробова розмірність. Слово "фрактал" походить від латинського "fractus" – дробовий, дроблений і вказує як на складну геометрію фрактального

© Горбонос А.О., Михальов О.І., 2010

об'єкту, так і на його дробову розмірність. Фрактали є всюди, де скінчаються правильні форми евклідової геометрії. Їх можна знайти в навколишній природі: границі хмар, границі узбереж, турбулентні потоки в рідинах, зображення структури деяких речовин, кровоносна система серцевого м'яза, металеві структури та ін.

Застосування фракталів уже довело свою користь у ряді прикладних областей. Фрактали використовуються при аналізі і класифікації сигналів складної форми, що виникають у різних областях. Вони застосовуються у фізику твердого тіла, для стиску зображень і т.д.

Важлива властивість фракталів – самоподібність – використовується в цій роботі для побудови мозаїки Пенроуза.

Мозаїка Пенроуза є узором, зібраним з двох ромбів з рівними сторонами (рисунок 1). Внутрішні кути вузького ромба рівні 36° і 144° , широкого ромба - 72° і 108° (рисунок 2). Кути цих ромбів пов'язані із золотим пропорцією, яка алгебраїчно виражається рівнянням $x^2 - x - 1 = 0$ або рівнянням $y^2 + y - 1 = 0$.

Золотий перетин – це таке пропорційне ділення відрізка на нерівні частини, при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як сама велика частина відноситься до меншої [7].

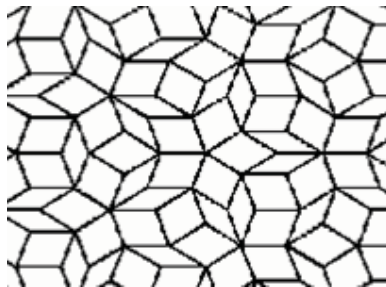


Рисунок 1 – Мозаїка Пенроуза

У мозаїці Пенроуза площина закривається золотими ромбами без пропусків і перекриттів, і її можна безмежно розстилати в довжину і ширину. Але для побудови нескінченної мозаїки треба дотримуватися певних правил, що істотно відрізняються від одноманітного повторення однакових елементарних частин, що складають кристал. Якщо правило підгонки золотих ромбів порушити, то через деякий час зростання мозаїки припиниться, оскільки з'являться неусувні неузгодження. У нескінченній мозаїці Пенроуза ромби розташовуються без строгої періодичності. Проте

відношення числа широких ромбів до вузьких ромбів точно рівне золотому числу $D = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,6180339\dots$

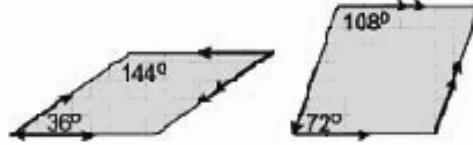


Рисунок 2 – Складові мозаїки Пенроуза – вузькі і широкі золоті ромби

На основі мозаїки Пенроуза запропонована побудова моделі квазікристала. Модель Пенроуза добре описує деякі основні властивості квазікристалів. Побудова мозаїки реалізується по певному алгоритму, унаслідок чого вона виявляється не випадковою, а впорядкованою структурою. Будь-яка її кінцева частина зустрічається у всій мозаїці незліченно безліч разів. В мозаїці можна виділити багато правильних десятикутників, що мають абсолютно однакові орієнтації. Вони створюють дальній орієнтаційний порядок, названий квазіперіодичним. Це означає, що між видаленими структурами мозаїки існує взаємодія, яка погоджує розташування і відносну орієнтацію ромбів цілком певним, хоча і неоднозначним способом. Послідовно закрашені ромби утворюють п'ять сімейств подібних паралельних ліній, пересічних під кутами, кратними 72° . Напрями цих ламаних ліній відповідають напрямкам сторін правильного п'ятикутника. Тому мозаїка Пенроуза має поворотну симетрію 5-го порядку і в цьому сенсі подібна до квазікристала.

Мозаїка Пенроуза, як і фрактал, має важливу властивість – самоподібність (рисунок 3).

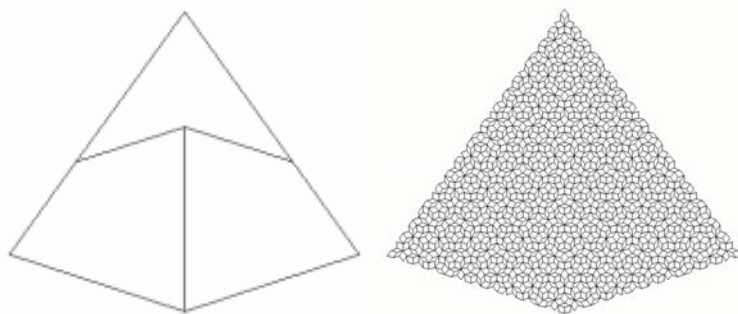


Рисунок 3 – Самоподібність мозаїки Пенроуза

Отже, модель квазікристала може бути створена на основі мозаїки Пенроуза з двома "елементарними складовими",

сполученими один з одним по певним правилам стиковки. Ці спеціальні правила набагато складніші, ніж примітивна трансляція однакових складових в класичних кристалах. Модель Пенроуза добре описує деякі основні властивості квазікристалів, але недостатньо пояснює реальні процеси їх атомного зростання, що носять явно нелокальний характер. Існують і інші теоретичні моделі, що намагаються пояснити природу квазікристалічних структур. Проте мозаїки Пенроуза з двома і більш фігурами визнаються найбільш правильним ключем до розуміння структури квазікристалів.

Розроблено і тривимірне узагальнення мозаїки Пенроуза, що складається з вузького і широкого ромбоєдрів, шестигранних фігур, кожна грань яких - ромб. Така просторова мозаїка володіє ікосаедричною симетрією. Старогрецький філософ Платон вивчав правильні многогранники і визначив, що може бути тільки п'ять фігур, що мають однакові грані і однакові ребра. Це куб, тетраедр, октаедр, додекаедр і ікосаедр. Дві останні фігури володіють шістьма поворотними осями 5-го порядку, тобто поєднуються самі з собою при обертанні на $1/5$ обороту навколо осей, що проходять через центри протилежних граней у додекаедра і через протилежні вершини у ікосаедра. Відповідна цим двом фігурам поворотна симетрія має назву ікосаедричної.

Принципи побудови мозаїки Пенроуза можуть використовуватися при побудові фрактальних поверхонь [3].

На основі мозаїки Пенроуза була побудована фрактальна поверхня, яка за ознаками близька до поверхні металевих сплавів (рисунок 4) [8].

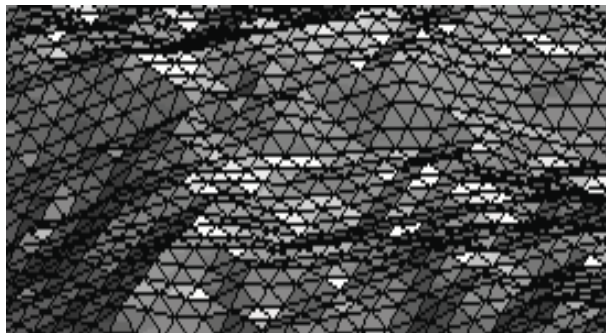


Рисунок 4 – Фрактальна поверхня побудована на основі мозаїки Пенроуза

Поверхні металевих сплавів не є ідеально рівними та геометрично правильними. Якість поверхні характеризується

шорсткістю – середньоквадратичним відхиленням, максимальною висотою нерівностей, середнім кроком нерівностей профілю. Шорсткість як властивість реальної негладкої поверхні виявляється через сукупність окремих нерівностей, що утворюють мікроструктуру поверхні. Застосування теорії фракталів дозволить внести новий показник для оцінки шорсткості (рисунок 5).

Фрактал являє собою геометричний об'єкт, що характеризується нерегулярністю, але самоподібністю, що означає, що об'єкт одноманітно улаштований на різноманітних масштабах його розглядання. Тобто передбачається незмінність основних геометричних особливостей об'єкту при зміні масштабу. Нерегулярність об'єкту означає деяку його дробову (фрактальну) розмірність, яка відрізняє його від розмірності лінії, поверхні чи простору.

Фрактальна розмірність є одною з основних характеристик фрактала. Фрактальні об'єкти, для повного опису яких, недостатньо введення лише одної фрактальної розмірності, а необхідний спектр таких розмірностей, мають назву мультифракталів.

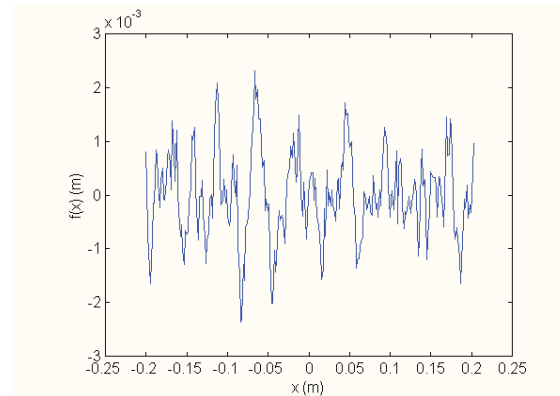


Рисунок 5 – Профіль шорсткості фрактальної поверхні, побудованої за допомогою функції Вейерштраса-Мандельброта (фрактальна розмірність 1.5)

Таким чином, на основі мозаїки Пенроуза запропонована побудова моделі квазікристала. Модель Пенроуза добре описує деякі основні властивості квазікристалів і її побудова реалізується по певному алгоритму, унаслідок чого вона виявляється не випадковою, а впорядкованою структурою. Мозаїка Пенроуза, як і фрактал, має важливу властивість – самоподібність. Тому доцільним є побудування фрактальної поверхні, яка за ознаками близька до поверхні металевих сплавів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Федер Е. Фракталы /Пер. с англ.-М.: Мир, 1991.
2. Михалев А.И., Водолазский Ю.А. Мультифрактальный анализ в задачах оценивания качества медных покрытий // Нові Технології. – 2(12). – Кременчуг: КУЕІТУ, 2006. – С. 184-188.
3. Barbasi A.-L., Stanley H. E. Fractal concepts in surface growth. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
5. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – М.:Ижевск, 2002 — 167 с.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 527с.
7. Васютинский Н. А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990 – 355с.
8. Михальов О.І., Горбонос А.О. Побудова фрактальної поверхні на основі мозаїки Пенроуза//Тези доповідей міждержавної науково-методичної конференції “Проблеми математичного моделювання”. – Дніпродзержинськ, 27-29 травня 2009р. – с.131-133.