

УДК 629.162.2

Н.В. Селезнева

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Получено решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных тел при экстремальных тепловых воздействиях. Проведены параметрические исследования тепловой изоляции и определены рациональные геометрические и теплофизические характеристики. Анализ расчетных результатов с данными экспериментальных исследований показал удовлетворительное согласование.*

*Математические модели, многослойные тела, температурные поля, экстремальные тепловые воздействия.*

### Введение

Определение температурных полей элементов конструкций при воздействии на них полей различной физической природы требует решения целого комплекса взаимосвязанных задач газовой динамики, теории теплопроводности, т.е. решения внешних задач сопряженного теплообмена. Учет неоднородности протекания большинства процессов при решении задач в такой сложной сопряженной постановке представляет трудности с математической и вычислительной точек зрения.

Решение задач нестационарной теплопроводности с учетом названных факторов в настоящее время возможно численными, численно-аналитическими и приближенными аналитическими методами. Применение численных методов может оказаться плодотворным, например, после предварительного аналитического решения соответствующей задачи [1-3]. Трудоемкость и длительность экспериментального подбора необходимых композиций материалов для составных элементов конструкций, удовлетворяющих требованиям надежности и её экономичности, ставят вопрос об аналитическом расчете их температурного режима. Решение, полученное аналитическим методом в отличие от наиболее развитых в настоящее время численных методов, позволяют представить его в конечном виде, и дает возможность варьировать теплофизическими и геометрическими параметрами для подробного анализа температурных полей.

---

© Селезнева Н.В., 2010

Структурные решения многопараметрических задач теплопроводности для составных элементов конструкций обладают однообразной вычислительной схемой; позволяют выделять воздействия каждого из действующих на конструкцию электромагнитных полей и оценить их влияние на температурное поле в любом слое в заданный момент времени, а также учитывать влияние внешних граничных условий и виды неидеального теплового контакта[1,4].

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу о нестационарном температурном поле битумосодержащей кровли[5]. При эксплуатации таких кровельных покрытий экстремальные тепловые воздействия возникают при интенсивных радиационно-конвективных тепловых потоках.

Нагревательное устройство “а” (рис. 1) обеспечивает прогрев битумосодержащего композита “б” и цементно-песчаной стяжки “в” на конечном участке  $L$ . Считаем, что на границе тела “в” и слоя утеплителя “г” заданы адиабатные условия. Толщина цементно-песчаной стяжки  $\delta_1$  и толщина гидроизоляционного слоя  $\delta_2$  выбираются в соответствии с нормативными документами или по результатам инструментальной диагностики.

Теплофизические свойства  $(a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2)$  изотропных тел системы не зависят от температуры. Температуры стенок нагревательного устройства  $T_c$ , теплоносителя  $T_6$ , и окружающей среды  $T_n$  считаются заданными. Известны коэффициенты теплоотдачи  $a$  и  $a_n$ , степени черноты  $\varepsilon_1, \varepsilon_n, \varepsilon_c$ .

Требуется определить изменение температурного поля системы “кровельное покрытие – цементно-песчаная стяжка” на границе нагревательного устройства при вариации времени нагрева, геометрических параметров битумосодержащего композита и теплофизических свойств плоской неоднородной системы.

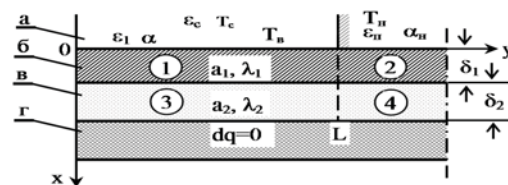


Рис. 1 – К постановке двумерной задачи теплопроводности:  
 а – нагревательное устройство; б – битумосодержащий композит;  
 в – цементно песчаная стяжка; г – слой утеплителя;  
 1-4 – расчетные области

Математическая модель двумерной задачи включает четыре уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T_i(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a_i \left[ \frac{\partial^2 T_i(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right]; \quad (1)$$

$$\tau > 0; \quad 0 \leq x \leq \delta_1; \quad 0 \leq y \leq \infty; \quad i = 1, 2;$$

$$\frac{\partial T_j(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a_j \left[ \frac{\partial^2 T_j(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right]; \quad (2)$$

$$\tau > 0; \quad \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2; \quad 0 \leq y \leq \infty; \quad j = 3, 4.$$

В начальный момент времени температура в каждой точке областей 1 - 4 постоянна и равна  $T_0$ :

$$T_i(x, y, \tau)|_{\tau=0} = T_j(x, y, \tau)|_{\tau=0} = T_0; \quad i = 1, 2; \quad j = 3, 4. \quad (3)$$

На границе  $x = 0$  расчетных областей 1 и 2 осуществляется радиационно-конвективный теплообмен:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha \left[ T_g - T_1(x, y, \tau) \Big|_{x=0} \right] + \varepsilon_{np} \sigma_0 \left[ T_c^4 - T_1^4(x, y, \tau) \Big|_{x=0} \right]; \quad (4)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_n \left[ T_2(x, y, \tau) \Big|_{x=0} - T_n \right] + \varepsilon_n \sigma_0 \left[ T_2^4(x, y, \tau) \Big|_{x=0} - T_n^4 \right]. \quad (5)$$

На границе ( $y = 0$ ) заданы условия симметрии:

$$\frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial T_2(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (6)$$

При  $y \rightarrow \infty$  температура композита и стяжки равна  $T_n$ :

$$T_2(x, y, \tau) \Big|_{y=\infty} = T_4(x, y, \tau) \Big|_{y=\infty} = T_n. \quad (7)$$

На границах между расчетными областями при  $x = \delta_1$  и  $y = L$  имеет место идеальный тепловой контакт:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=L} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=L}; \quad T_1(x, y, \tau) \Big|_{y=L} = T_2(x, y, \tau) \Big|_{y=L}; \quad (8)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=L} = \lambda_4 \frac{\partial T_4(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=L}; \quad T_3(x, y, \tau) \Big|_{y=L} = T_4(x, y, \tau) \Big|_{y=L}; \quad (9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1} = \lambda_3 \frac{\partial T_3(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1}; \quad T_1(x, y, \tau) \Big|_{y=\delta_1} = T_3(x, y, \tau) \Big|_{x=\delta_1}; \quad (10)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1} = \lambda_4 \frac{\partial T_4(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1}; \quad T_2(x, y, \tau) \Big|_{y=\delta_1} = T_4(x, y, \tau) \Big|_{x=\delta_1} \quad (11)$$

На границе  $x = \delta_1 + \delta_2$  заданы адиабатные условия:

$$\left. \frac{\partial T_3(x, y, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta_1+\delta_2} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_4(x, y, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta_1+\delta_2} = 0. \quad (12)$$

Использование приближенных аналитических решений, основанных на структурном методе[1,2,4] в одномерной постановке позволило выявить влияние основных технологических параметров, определяющих интенсивность внешнего теплообмена, на процесс формирования температурных полей в составном плоском теле.

Полученные аналитические решения (1)–(12) могут быть использованы для качественного анализа полей температуры в системе “кровельное покрытие – цементно-песчаная стяжка” и позволяют определить минимально возможное время разогрева при заданных значениях теплофизических свойств, коэффициентов теплоотдачи, толщин слоев  $\delta_1, \delta_2$ , уровней температуры излучающих поверхностей  $T_c$  и воздушной среды  $T_g$ . При тепловой обработке системы “кровельное покрытие – цементно-песчаная стяжка” необходимо знать: время тепловых воздействий для разных толщин кровельного покрытия и цементно-песчаной стяжки; уровень температуры излучающих поверхностей  $T_c$  и конвектирующей среды  $T_g$  в рабочем пространстве спекателя в зависимости от температуры окружающего воздуха  $T_n$ . На первом этапе, оказалось возможным получить приближенное аналитическое решение одномерной задачи теплопроводности, в котором эти и ряд других параметров взаимосвязаны.

### Методы исследований и анализ результатов

Результаты расчетов представлены на рис.2 и на рис.3, где сравниваются с результатами натурального эксперимента[5].

В процессе эксплуатации двух и многослойного битумосодержащего покрытия на поверхности появляется неорганическая пыль, которая в жаркое время вплавляется в поверхностный слой, увеличивая при этом теплопроводность битумосодержащего композита. С другой стороны, в процессе устройства кровли и при ее эксплуатации, возможно образование тонких слоев воздуха и водяного пара в отдельных местах между слоями. В этом случае увеличивается контактное термическое

сопротивление между слоями и теплопроводность покрытия уменьшается. Данные по теплопроводности гидроизоляционного покрытия получены экспериментально[5].

На рис. 2 представлены результаты численного расчета (кривые 1, 2, 3, 4) изменения температуры по координате  $y$  ( $0,48 \leq y \leq 0,53$ , м). Кривыми 5, 6, 7, 8 показаны результаты расчета задачи (1)-(4).

Результаты экспериментов (экспериментальные точки) подтвердили, что на участке (не менее 0,02м) по периметру имеет место резкое снижение температуры покрытия.

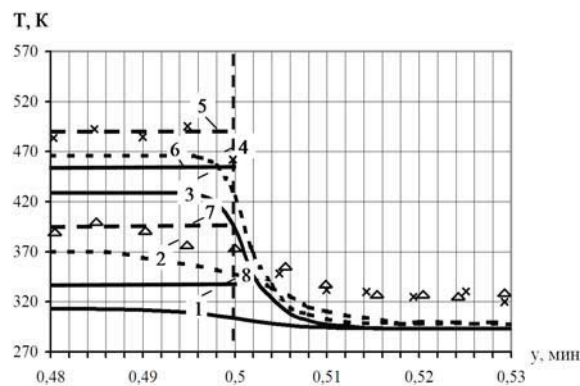


Рис. 2 – Сопоставление результатов расчета полей температуры с результатами натурального эксперимента:

- 1 - температурное поле  $x = \delta_1$ , время прогрева 2 минуты;
- 2 - температурное поле  $x = \delta_1$ , время прогрева 8 минут;
- 3 - температурное поле  $x = 0$ , время прогрева 2 минуты;
- 4 - температурное поле  $x = 0$ , время прогрева 8 минут;
- 5 - температурное поле  $x = 0$ , время прогрева 8 минут;
- 6 - температурное поле  $x = 0$ , время прогрева 2 минуты;
- 7 - температурное поле  $x = \delta_1$ , время прогрева 8 минут;
- 8 - температурное поле  $x = \delta_1$ , время прогрева 2 минуты;
- × - эксперимент  $x = 0$ , время прогрева 8 минут;
- Δ - эксперимент  $x = \delta_1$ , время прогрева 8 минут

Выполненный сопоставительный анализ результатов расчета температурных полей и опытных данных показал их удовлетворительное согласие между собой.

На рис.3 представлен результат сопоставления расчетных и опытных данных температурно-временного режима системы “покрытие - стяжка”.

Расчеты по аналитическому решению (1)-(4) показаны кривыми 1, 2. Результаты расчета по аналитическому решению (1)-(4), при учете только первого члена ряда для  $x = \delta_1 + \delta_2$  и  $x = \delta_1$ , представлены кривыми 3 и 4.

Применяя конечно-разностную аппроксимацию и неявный метод переменных направлений в модификации Писмэна – Рэчфорда, система уравнений (1)-(2), решалась методом исключения Гаусса, ввиду трёхдиагональности входящих в нее уравнений в матричном представлении. К граничным условиям (8) – (12) также применялась конечно-разностная аппроксимация[4].

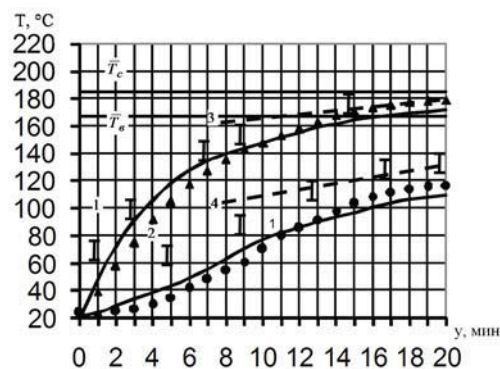


Рис. 3 – Сопоставление расчетных по аналитическому решению (1-4) и опытных данных по результатам 7 измерений в различных местах кровли:  
 1, 2 - результаты расчета по (1) с учетом 12 членов ряда;  
 3, 4 - результаты расчета по (1) с учетом 1 члена ряда;  
 - температура поверхности покрытия  
 (максимальный разброс 19  $^\circ\text{C}$  по результатам 7 опытов);  
 • - температура поверхности цементно-песчаной стяжки  
 (максимальный разброс 16  $^\circ\text{C}$  по результатам 7 опытов)

Представленные данные на рис. 2 позволяют констатировать, что при мощности тепловыделений 4,56 кВт, время завершения процесса тепловой обработки составляет не менее 12 минут, когда температура поверхности стяжки превысит 80  $^\circ\text{C}$ . Вблизи этого времени достаточно хорошо согласуются результаты расчета и опытные данные (расхождение составляет не более 10 %), что дает основание рекомендовать к использованию аналитическое решение (1).

### Выводы

Рассмотренные задачи и предложенный структурный метод решения дают возможность использовать результаты для качественного анализа температурных полей составных элементов конструкций при экстремальных воздействиях.

Практическое значение работы заключается в том, что рассмотренные задачи и предложенный структурный метод решения дает возможность использовать результаты для качественного анализа температурных полей составных элементов конструкций под

экстремальным воздействием. Предлагаемые приемы построения приближенных решений могут быть использованы и при решении тепловых задач для более сложных пространственных областей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Веселовский В.Б., Селезнева Н.В., Горелова К.В. Математическое моделирование образования и разрушения гололедо-изморозевых отложений на элементах конструкций // Вестник Херсонского национального технического университета. Херсон. 2006. – С.106-110.
2. Веселовський В.Б., Селезньова Н.В. Математичне моделювання температурних полів конструкцій при екстремальних умовах // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформованого тіла. Вісник ДНУ, №9, 2008. - С.154-168.
3. Куудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. – М.: Высш. шк., 2005. – 430 с.
4. Веселовский В.Б. Тепловые режимы трубопроводов с движущимся теплоносителем при воздействии полей различной физической природы // Тепломассообмен. – Тепломассообмен в энергетических устройствах и энергосбережении. Т.10, часть 1. – Минск: Институт тепло- и массообмена АН Беларуси, - 1996. – С.226 – 230. (III-й Минский международный форум по тепломассообмену).
5. Теплоперенос в технологии восстановления водонепроницаемости мягких кровель термохимическим способом / Дегтяренко А.В., Цветков Н.А., Скачков С.И. // Вестник Томск. гос. архит. стр. ун.-та.-2002.–№ 1. - С. 58-68.