УДК 536.2:539.3

Ю.А. Мала

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ПОВЕРХНЕВОГО ЗМІЦНЕННЯ ДВОШАРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Представлена математична модель теплового процесу поверхневого зміцнення двошарового тіла в вигляді системи гіперболічних рівнянь теплопровідності. Структурним методом, основаному на інтегральному перетворенні Лапласа, отримано розв’язок задачі нестаціонарної теплопровідності для двошарового тіла. Приведені результати числових параметричних досліджень.

Ключові слова: гіперболічне рівняння теплопровідності, поверхневе зміцнення, структурний розв’язок.

Постановка проблеми

Характерною особливістю сучасних технологій виготовлення виробів є забезпечення не тільки високої точності, технологічності, а також і забезпечення необхідної довговічності деталей, які оброблюються при експлуатації. Цим вимогам в значній мірі відповідають нові технологічні процеси, які мають назву імпульсні технології, що дозволяють збільшити ефективність використання ресурсів та знизити матеріаломісткість виробництва. Цими технологіями досягається збільшення зносостійкості, динамічної міцності виробу [1, 2].

Суть багатьох імпульсних технологічних процесів зміцнення в тому, що на відносно невеликий об’єм металу діють імпульсно (з великими швидкостями) потоками енергії високої інтенсивності одночасно деформуючи і швидко охолоджуючи метал за рахунок відводу тепла в глиб матеріалу. Такі умови обробки дозволяють отримати достатньо цінні фізико механічні, електрохімічні, корозійні та експлуатаційні характеристики. Фізична суть процесу поверхневого зміцнення заснована на зміні структури матеріалу в поверхневому шарі у зв’язку з досягненням температури структурних та фазових перетворень [2].

Аналіз публікацій по темі дослідження

В роботі [1, 2] показана актуальність проблеми поверхневого зміцнення металів, представлені експериментальні методи дослідження данної проблеми. Обчислювальні експерименти наведені в роботах [3 – 6]. В роботах [3, 5] проаналізовано дія синусоїдального теплового імпульсу на різні метали. В роботі [4] розглянуті математичні моделі процесів теплопровідності в багатошарових системах, на основі гіперболічних рівнянь.

Формулювання цілей статті

Метою даної роботи є побудова математичної моделі теплового процесу поверхневого зміцнення двошарових елементів конструкцій та розробка обчислювального методу дослідження температурних полів.

Основна частина

Розглянемо математичну модель задачі нестаціонарної теплопровідності для двошарового тіла. Для кожного шару прийнята локальна система координат: $0 < x_1 < R_1$, $0 < x_2 < R_2$. Система гіперболічних рівнянь теплопровідності для двошарового тіла має вигляд:

$$\beta_\nu \frac{\partial^2 \Theta_\nu(x,Fo)}{\partial x^2} = \frac{\partial \Theta_\nu(x,Fo)}{\partial Fo} + Fo_{r,\nu} \frac{\partial^2 \Theta_\nu(x,Fo)}{\partial Fo^2} + \beta_\nu^* w_\nu\left(x,Fo\right), \; \nu = 1,\; 2, \quad (1)$$

де $\Theta_\nu = \dfrac{T_\nu\left(x,t\right)}{T_0}$ – безрозмірна температура; T_0 – початкова температура; $Fo_{r,\nu} = \dfrac{a_0 \tau_{r,\nu}}{R_0^2}$ – безрозмірний час релаксації теплового потоку; $Fo = \dfrac{a_0}{R_0^2} \cdot t$ – безрозмірний час; $\beta_\nu = \dfrac{a_\nu}{a_0} \cdot \dfrac{R_0^2}{R_\nu^2}$; $\beta_\nu^* = \beta_\nu \cdot \dfrac{R_\nu^2}{\lambda_\nu}$; $x = \dfrac{x_\nu}{R_0}$; a_0, R_0 – деякі довільні сталі; $\tau_{r,\nu}$ – час релаксації теплового потоку; a – коефіцієнт температуропровідності.

Початкові умови

$$\Theta_\nu(x,Fo)\big|_{Fo=0} = \varphi_\nu(x), \quad \frac{\partial \Theta_\nu(x,Fo)}{\partial Fo}\Big|_{Fo=0} = 0. \quad (2)$$

Зовнішні граничні умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Theta_1(x,Fo)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \left(f_0(Fo) + Fo_{r,1}\dfrac{\partial f_0(Fo)}{\partial Fo} \right)\Big|_{x=0} \\ \dfrac{\partial\Theta_2(x,Fo)}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Якщо в рівнянні (1) $Fo_{r,\nu} = 0$, то вони переходть в систему параболічних рівнянь.

В якості умов на контакті шарів розглядаються ідеальні умови четвертого роду

$$\begin{cases} \Theta_1(x,Fo)\big|_{x=1} = \Theta_2(x,Fo)\big|_{x=0} \\ \dfrac{\partial\Theta_1(x,Fo)}{\partial x}\Big|_{x=1} - \lambda_{21}\dfrac{\partial\Theta_2(x,Fo)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

де $f_0(Fo)$ – нестаціонарний тепловий потік.

Застосовуючи до задачі (1) – (4) операційний метод перетворення Лапласа, розв'язок задачі в зображеннях має вигляд

$$\overline{\Theta}_\nu(x,p) = A_\nu ch(\gamma_\nu \cdot x) + B_\nu sh(\gamma_\nu \cdot x) + \overline{z}_\nu^*(x,p)$$

де $\gamma_\nu = \sqrt{p(p \cdot Fo_{r,\nu} + 1)}$, A_ν, B_ν – константи інтегрування, які знаходяться із початкових, граничних умов та умов контакту(2) – (4):

$$A_1 = \frac{\overline{g}_4(p) + \overline{g}_3(p)\dfrac{sh\gamma_2}{\lambda_{21}} + \overline{g}_2(p)\gamma_2 ch\gamma_2 + \overline{g}_1(p)\rho_3(1)}{l_3(1)},$$

$$B_1 = \frac{\overline{g}_1(p)}{\gamma_1},$$

$$A_2 = \left[\overline{g}_4(p) + \overline{g}_3(p)\frac{sh\gamma_2}{\lambda_{21}} + \overline{g}_2(p)\left(\gamma_2 ch\gamma_2 + l_3(1)\right) + \overline{g}_1(p)\left(\rho_3(1) + l_3(1) sh\gamma_1\right) \right] \frac{ch\gamma_1}{l_3(1)},$$

$$B_2 = \left[\overline{g}_4(p) + \overline{g}_3(p)\left(\frac{sh\gamma_2}{\lambda_{21}} + l_3(1)\right) + \overline{g}_2(p)\gamma_2 ch\gamma_2 + \overline{g}_1(p)\left(\rho_3(1) + \gamma_1 sh\gamma_1 l_3(1)\right) \right] \frac{\gamma_1 sh\gamma_1}{l_3(1)\lambda_{21}\gamma_2}$$

Компоненти дії, які входять до констант інтегрування включают в собі нестаціонарні граничні умови, нерівномірний розподіл початкової температури, а також внутрішні джерела тепла, мають вигляд:

$$\overline{g}_1(p) = \overline{f}_0(p) - \overline{z}_1^{*\prime}(0,p), \quad \overline{g}_2(p) = \overline{z}_1^*(1,p) - \overline{z}_2^*(0,p),$$

$$\overline{g}_3(p) = \frac{\overline{z}_1^{*\prime}(1,p)}{\lambda_{21} \cdot \gamma_2} - \frac{\overline{z}_2^{*\prime}(0,p)}{\gamma_2},$$

 ISSN 1562-9945

$\overline{g}_4\left(p\right)=\overline{z}_2^{*'}\left(1,p\right)$;

Враховуючи те, що внутрішні джерела тепла відсутні $w_\nu\left(x,Fo\right)=0$ маємо $\overline{z}_\nu^*\left(x,p\right)=-\left(Fo_r+1\right)\cdot\varphi_\nu\left(x\right)$.

Розв'язок задачі з урахуванням констант інтегрування запишемо у вигляді

$$\overline{\Theta}_\nu\left(x,p\right)=\sum_{i=1}^{4}\overline{g}_i\left(p\right)\frac{\Phi_i\left(x,p\right)}{\Psi\left(p\right)}+\overline{z}_\nu^*\left(x,p\right). \quad (5)$$

Використовуючи (5) при переході від зображення до оригіналу отримаємо структурний розв'язок задачі у вигляді:

$$\Theta_\nu(x,Fo)=\sum_{r=1}^{4}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[\mu_{n,r}^\nu(x,Fo_{r,\nu}),\varphi_n\right]g_r^{(n)}(Fo,Fo_{r,\nu})+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_r(p_k)}{\Psi'(\varphi_n,p_k)}\Phi\left[p_k,\mu_{n,r}^\nu(x,Fo_{r,\nu})\right]\exp(-\gamma_k^2\cdot Fo)\right\}+z_\nu^*(x,Fo), \quad (6)$$

де $z_\nu^*(x,Fo)$ – частковий розв’язок рівняння (1), який має вигляд:

$z_\nu^*(x,Fo)=z_\nu^{*пар}(x,Fo)+z_\nu^{*гіп}(x,Fo)$,

$$z_\nu^{*пар}(x,Fo)=-\sum_{n=0}^{\infty}\beta_\nu^n\frac{Fo^n}{n!}\varphi_\nu^{(2n)}\left(x\right),$$

$$z_\nu^{*гіп}(x,Fo)=Fo_{r,\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_\nu^n\frac{\left(n+1\right)Fo^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\varphi_\nu^{(2n)}\left(x\right).$$

p_k – корні трансцендентного рівняння

$$\Psi\left(\varphi_n,p\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\cdot p^n=0;$$

$$\Phi\left[\mu_{n,r}^\nu\left(x\right),p_k\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{n,r}^\nu\left(x\right)\cdot p^n;$$

$$\Omega_n\left[\mu_{n,r}^\nu\left(x\right),\varphi_n\right]=\frac{\mu_{n,r}^\nu\left(x\right)}{\varphi_0}-\sum_{j=0}^{n}\Omega_{n-j}\left[\mu_{n-j,r}^\nu\left(x\right),\varphi_{n-j}\right]\cdot\frac{\varphi_j}{\varphi_0};$$

$g_r\left(Fo,Fo_{r,\nu}\right)$ – компоненти дії. Вміст функцій $\Phi\left(x,p\right)$, $\Psi\left(\varphi_n,p\right)$, $l_3\left(1\right)$ наведено в роботах [3-6].

Розв'язок (6) є загальним розв'язком задачі, достовірність отриманого розв’язку показано в роботі [4].

В результаті проведених числових досліджень були отримані розподіли температурних полів при поверхневому зміцненні двошарової необмеженої пластини, яка складається із сталі та титану. Теплофізичні характеристики матеріалів приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Теплофізичні характеристики матеріалів

	λ, (Вт/м К)	с, (Дж/кг К)	ρ, (кг/м^3)	товщина, (м)	τ_r , с
Ст.15	55	565	7860	10^{-7}	10^{-11}
Титан	17	586	4500	10^{-7}	10^{-11}

Граничні умови на поверхні $x=0$ були задані у вигляді імпульсної дії параболічного та синусоїдального типу в розмірному вигляді:

$$-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = f_0(t),\ f_0(t) = \begin{cases} q_{\max} t\left((t-iP)/P_1\right), t-iP \le P_1 \\ 0, t-iP > P_1 \end{cases}$$

$$-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = f_0(t),\ f_0(t) = \begin{cases} q_{\max} \sin\left(\pi(t-iP)/P_1\right), t-iP \le P_1 \\ 0, t-iP > P_1 \end{cases}.$$

Для порівняння відмінності гіперболічного рівняння та параболічного рівняння теплопровідності на рис. 1 представлені залежності температур від часу Fo при $x=0$, з яких видно, що розв'язок гіперболічного рівняння та параболічного відрізняються.

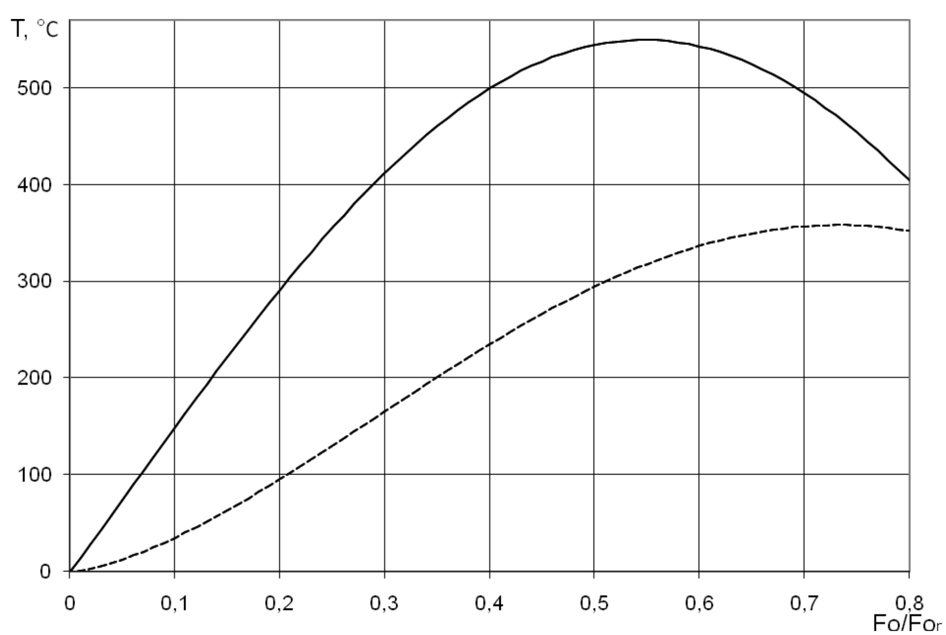

Рис. 1 – Температурне поле для титану при $x=0$:

------ –параболічний розв'язок, ——— – гіперболічний розв'язок

На рис. 2, рис. 3 представлені температурні поля для сталі (дія синусоїдального імпульсу) в момент часу $Fo = 0{,}01$, та в перерізі $x = 0{,}005$. На рис. 4, рис. 5 проілюстровано розподіл температур в перерізі $x = 0{,}005$ (рис. 5); в момент часу $Fo = 0{,}01$ (рис. 4) пластини із титану (дія параболічного імпульсу).

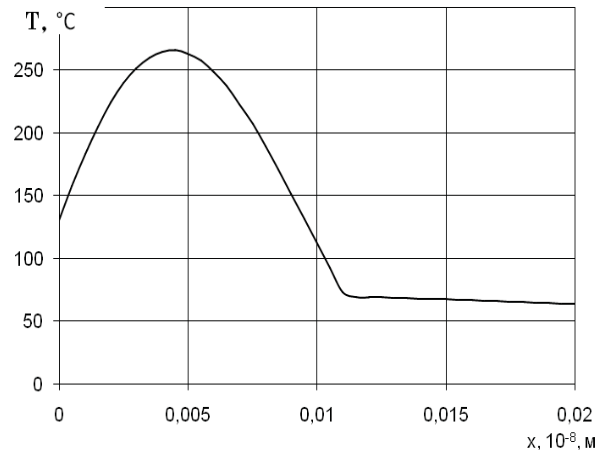

Рис. 2 – Температурне поле для Ст.15 при Fo = 0,01 (синусоїдальний імпульс)

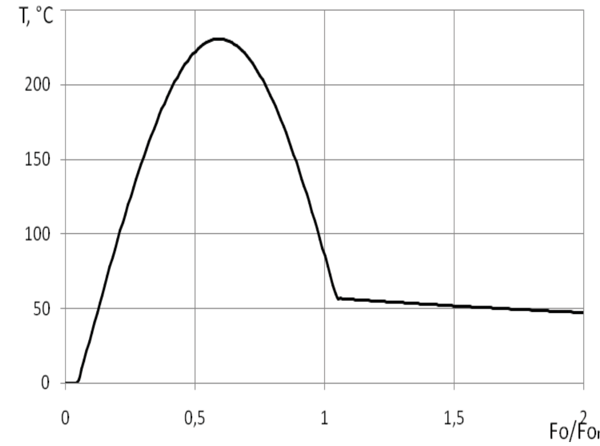

Рис – 3. Температурне поле для Ст.15 при x = 0,0005 (синусоїдальний імпульс)

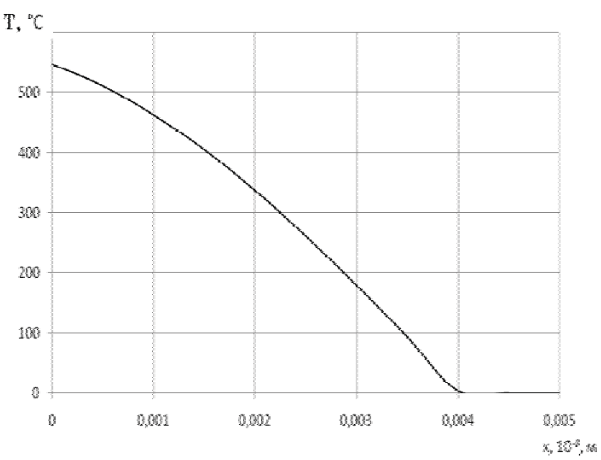

Рис. 4 – Температурне поле для титану при Fo = 0,01 (параболічний імпульс)

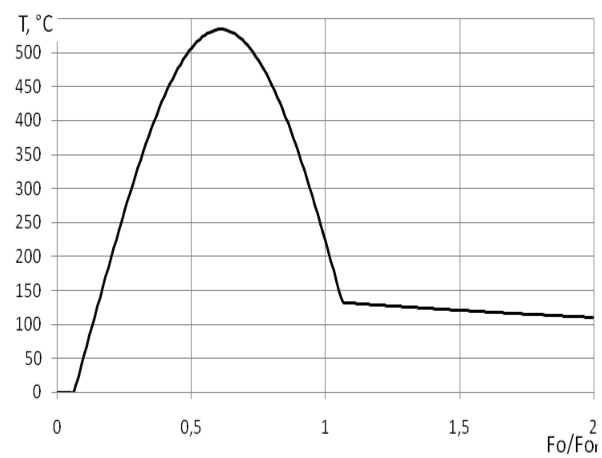

Рис. 5 – Температурне поле для титану при x = 0,0005 (параболічний імпульс)

Висновки й перспективи подальших досліджень

Математична модель теплового процесу поверхневого зміцнення двошарових елементів конструкцій, на основі системи гіперболічних рівнянь теплопровідності з нестаціонарними граничними уовами, дозволяє прогнозувати температурне поле поверхневого шару елементів конструкцій при виборі технологічних режимів поверхневого зміцнення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабей Ю.И. Физические основы импульсного упрочнения стали и чугуна / Ю.И. Бабей. – Киев: Наукова думка, 1988. – 239 с.

2. Черненко В.С. Променеві методи обробки: Навчальний посібник / В.С. Черненко, М.В. Кіндрачук, О.І. Дудка. – К.: Кондор, 2008. – 166 с.

3. Веселовский В. Б. Математичне моделювання теплпровідності для складених тіл з урахуванням узагальненого закону Фур'є / В. Б. Веселовский, Ю. А. Малая, А. В. Сясєв // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон, 2009. – С.141-146.

4. Веселовский В. Б. Математическое моделирование импульсных теплотехнологических процессов / В. Б. Веселовский, Ю. А. Малая, К. И. Гнедаш // Металлургическая теплотехника. – Днепропетровск: «ПП Грек О.С.», 2007. – С. 53 – 61.

5. Мала Ю. А. Поверхневе зміцнення металів висококонцентрованими потоками енергії / Ю. А. Мала // Динаміка та міцність машин, будівель, споруд. : Зб. наук. пр. Полт. НТУ. – Полтава, 2009. – С. 192-200.

6. Малая Ю. А. Решение задач про тепловой удар на поверхности неограниченной пластины / Ю. А. Малая, Ю. М. Скотаренко // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Вид. ДНУ, 2003. – С. 141 – 148.

 ISSN 1562-9945