

МАГНИТНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМАХ

Разработана математическая модель релаксационных процессов в сверхпроводящих магнитах, работающих в изменяющихся внешних магнитных полях. Для решения задачи применены аналитические решения, полученные структурным методом на основе интегрального преобразования Лапласа и методом конечных разностей. На основе построенных решений получены расчетные данные для анализа конкретных примеров электромагнитных и тепловых процессов при проектировании, создании транспортных сверхпроводящих магнитных систем.

Ключевые слова: магнитная релаксация, математическая модель, операционный метод, метод конечных разностей.

Введение

Сверхпроводящие магнитные системы (СМС) высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) с электродинамической левитацией содержат сложные технические устройства - криогенные модули. Они выполняют функции магнита возбуждения в линейном синхронном двигателе (ЛСД), а также, силового узла подвеса и горизонтальной стабилизации вагона. Криогенный модуль представляет собой совокупность сверхпроводящего (СП) магнита и криостата[1]. Катушка СП магнита и СП ключ выполнены с ниобий - титанового (Ni-Ti) сплава. Материал имеет химические и физические неоднородности структуры, превышающие межатомные расстояния [2,3]. Используемый СП провод на основе сплава HT-50, например диаметром 2,4 мм, содержит в медной матрице СП жилы диаметром порядка 23 мкм. Провод изготавливают по традиционной технологии с применением горячего прессования и волочения с промежуточными термообработками через 60-70% деформации. Он сохраняет высокую пластичность в области криогенных температур вплоть до 20К благодаря местным наклепам медной матрицы в области шейки в СП жилах. Однако, при дальнейшем понижении температуры до 4,2К, в этих жилах появляются трещины, что добавляет тепловые потери к потерям вызванными вихревыми токами в медной матрице. Короткий

образец провода пропускает высокие токи, порядка 1500А, во внешнем магнитном поле до 0,5 Тл. В условиях же эксплуатации происходят переходные процессы и СП катушка (магнит) изменяет свои технические показатели.

Исследование релаксационных явлений в сверхпроводниках является эффективным методом анализа переходных процессов в СП магнитах, работающих в быстро изменяющихся внешних магнитных полях [4,5,7]. Представляет интерес изучение процессов магнитной релаксации, когда внешнее магнитное поле $B(x,t) = B_0 + B_i$, состоит из двух компонент - большой постоянной и малой переменной ($B_0 \gg B_i$) и при $t = t_i$ принимает постоянное значение $B_{0,i}$.

Математическая модель

Ниобий-титановые сплавы относятся к СП второго рода, главной отличительной чертой которых является наличие двух критических магнитных полей перехода: нижнего H_{k_1} и верхнего H_{k_2} . В интервале этих полей СП второго рода находится в «смешанном» состоянии, т.е. отсутствует эффект Мейснера (внутри СП металла $B=0$) [2,3].

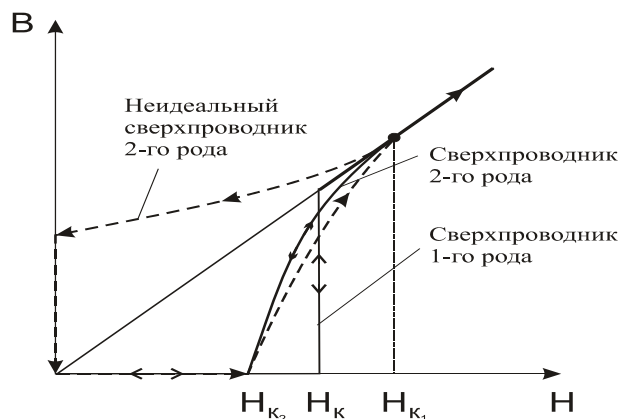


Рис. 1 – Зависимость индукции магнитного потока B от величины приложенного поля H для сверхпроводников первого и второго рода

На рис.1 представлена зависимость индукции магнитного поля в образце от внешнего поля. Видно, что в полях меньших H_{k_1} поведение СП первого и второго рода сходно. В полях больших, чем H_{k_2} СП разрушается, а в промежуточной области существует «смешанное» состояние, которое энергетически выгодно при проникновении магнитного поля в СП в виде одиночных электрических вихрей по

кванту магнитного потока. Сердцевины вихрей находятся в «нормальном» состоянии, а по периферии вихрей текут СП токи. Между вихрями остается СП фаза, по которой течет незатухающий ток. Внешнее магнитное поле проникает в объем СП по сердцевинам вихрей вплоть до величины критического поля. Вихри, упорядоченные в треугольную решетку, получили название «вихри Абрикосова». Равновесное состояние вихрей Абрикосова, когда ток меньше критического называют пиннингом. В условиях пиннинга происходит перенос магнитного потока, т.е. при слабом токе происходит движение вихрей. Явление ползучести решетки вихрей Абрикосова называют «крипом магнитного потока», {«крип» (англ. сгеер), синоним – ползучесть, дрейф} или же «магнитной релаксацией». Физические процессы, такие как перенос (диффузия) вихрей, вызваны термомагнитной неустойчивостью, описываются соответствующими уравнениями вольт-амперных характеристик (ВАХ) степенного и (или) экспоненциального типа.

Согласно системе уравнений Максвелла, релаксация напряженности электрического поля, индуцированного внешним возмущением, например ЛСД ВСНТ, в прямоугольной системе координат описывалась уравнением:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \frac{J_c}{nE} \sqrt{\frac{E}{E_c}} \frac{\partial E}{\partial t} + t_e \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где J_c – плотность тока, определенная при напряженности электрического поля E_c ; n – показатель степени, определяющий крутизну ВАХ; μ_0 – магнитная проницаемость среды; $t_e = t_n \left(E_c / E_{0,i} \right)^{(n+1)/n}$, t_e – характерное время релаксации магнитного потока; с граничными и начальными условиями вида:

$$\partial E(0,t)/\partial x = 0, \quad E(\infty,t) = 0, \quad \partial E(x,t_i)/\partial t = 0, \quad E(x,t_i) = E_0(x) \quad (2)$$

здесь $E_0(x)$ – распределение индуцированного электрического поля в момент времени прекращения нарастания внешнего магнитного поля. Второе граничное условие записано в предположении, согласно которому экранирующий ток заполняет все сечение сверхпроводника.

При этом, для ВАХ, $E(J)$, принимается степенной закон, целесообразность которого подтверждается многочисленными экспериментами [2,3,8] и описываемых соответствующими уравнениями в диффузионном приближении. В простейшем случае

$$E = E_c (J/J_c)^n \quad (3)$$

$$E = E_c \exp[(J - J_c)/J_\delta], \text{ или в виде: } \partial^2 E / \partial x^2 = \mu_0 [(J_\delta/E) \cdot (\partial E / \partial t)] \quad (4)$$

Здесь J_δ – токовая постоянная изменения ВАХ,

Дополнительное условие, описывающее сохранение «замораживаемого» внешнего магнитного потока, записываем в виде:

$$\mu_0 \int_0^\infty J(x, t) dx = B_{0,i}, \quad t \geq t_i$$

В автомодельном виде:

$$\int_0^{Z_0} \sqrt[n]{Y} dy = 1, \quad (5)$$

Соблюдение принципа сохранения магнитного потока необходимо для корректного исследования релаксационных явлений.

Решение задачи

Для решения задачи (1),(2), (3) введем безразмерные переменные $e = E/E_c$, $X = x/L$, $\tau = t/t_x$, $L_x = B_{0,i}/\mu_0 J_c$, $t_x = B_{0,i}^2/\mu_0 J_c E_c$ и будем искать ее решение в виде:

$$e = (\tau + \tau_0)^q \cdot Y(Z), \quad q = -n/(n+1), \quad (6)$$

$$X = (\tau + \tau_0)^p \cdot Z, \quad p = 1/(n+1). \quad (7)$$

где, символом $Y(Z)$ обозначен инвариант внутренней Z зоны СП, а τ_0 – некоторая постоянная, подлежащая определению.

Проведя дифференцирование (6), (7) по независимым переменным X , τ и Z , получим:

$$(n+1) \frac{d^2 Y}{dZ^2} + Y^{1-n/n} \cdot \frac{Z}{n} \frac{dY}{dZ} + \sqrt[n]{Y} = 0, \quad \frac{dY}{dZ(0)} = 0, \quad Y(\infty) = 0. \quad (8)$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$Y(Z) = \left[\frac{n-1}{2n(n+1)} (Z_0^2 - Z^2) \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad (9)$$

где Z_0 – неизвестная постоянная.

Так как допустимые значения $Y(Z)$ существуют на ограниченном отрезке $0 \leq Z \leq Z_0$, причем $Y(Z_0) = 0$ применим условие сохранения

внешнего магнитного потока в автомодельном виде. Подставив (9) в (5), получим

$$Z_0 = \sqrt[n+1]{\frac{2n(n+1)}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{\Psi_1} \right), \text{ где } \Psi_1 = \int_0^1 \sqrt[n-1]{1-y^2} dy. \quad (10)$$

Конечное значение Z_0 , при котором $\Upsilon(Z)=0$ приводит к особому характеру его изменения в окрестности точки $Z=Z_0$, так как, согласно решения (9), $d^k \Upsilon / dZ^k = 0$, $k=1,2,3,\dots$ при $Z=Z_0$.

Таким образом, затухание электромагнитного поля со степенной ВАХ происходит в конечной области, которая в размерном виде описывается следующими выражениями:

$$E(x,t) = E_C \left(\frac{n-1}{2n(n+1)} \cdot \frac{t_x}{t+t_0} \cdot \frac{1}{\Psi_1^2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (11)$$

$$B(x,t) = B_{0,i} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{x_0 \Psi_1} \right) \cdot \int_0^x \sqrt[n-1]{\left(1 - \frac{y^2}{x_0^2} \right)} \cdot dy \right]. \quad (12)$$

$$x_0(t) = \frac{B_{0,i}}{\mu_0 J_C \Psi_1} \cdot \sqrt[n]{\frac{E_C}{E_0(t)}}. \quad (13)$$

Характерное время релаксации магнитного потока t_e в момент времени t_i $t_e = t_i + t_0$, где t_0 - const. Задавая значение напряженности электрического поля на поверхности сверхпроводника $E_{0,i} = E_0(0)$ определим $t_e = t_n \left(E_C / E_{0,i} \right)^{(n+1)/n}$.

При вводе в СП электрического и (или) магнитного полей релаксационный процесс имеет конечную протяженность области намагниченности с подвижной границей. На этой границе имеют место условия плавного сопряжения полей со своими невозмущенными значениями

$$\partial^k E / \partial x^k = 0, \quad \partial^k B / \partial x^k = 0, \quad k=1,2,3,\dots$$

При этом экранирующий ток проникает в массив СП с конечной скоростью

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{B_{0,i}}{\mu_0 J_C \Psi_1} \cdot \frac{E_0(t)}{E_C}.$$

Приведенное решение задачи о релаксации магнитного потока внутри СП демонстрирует качественные особенности происходящих в

нем явлений. Оно показывает, что магнитная релаксация в первую очередь зависит от характера затухания электрического поля на поверхности СП. В частности, при прочих равных условиях, увеличение показателя степени n будет сопровождаться уменьшением времени затухания $E_0(t)$. В результате этого скорость проникновения экранирующего тока внутрь СП и скорость релаксации его магнитного момента также уменьшается. Кроме этого, участки СП переходят в нормальную фазу и в условиях левитации сила подвеса уменьшаться.

Числовые расчеты и их анализ

Проведено полное аналитическое решение задачи о релаксации магнитного потока внутри СП со степенной ВАХ основанное на структурном методе решения задач теплопроводности при экстремальных воздействиях [6,7]. Оно показывает, что магнитная релаксация в первую очередь зависит от характера затухания электрического поля на поверхности СП. В частности, при прочих равных условиях увеличение показателя степени n будет сопровождаться уменьшением времени затухания $E_0(t)$. В результате этого скорость проникновения экранирующего тока внутрь СП и скорость релаксации его магнитного момента также уменьшается.

Для иллюстрации описания процессов релаксации сопоставлены между собой соответствующие результаты численного и аналитического расчетов. На рис.2 для различных значений времени t_i показано изменение напряженности электрического поля на поверхности сверхпроводника с параметрами равными:

$E_c = 10^{-4} B/cm$, $J_c = 4 \cdot 10^9 A/m^2$, $n = 80$. Сплошные кривые соответствуют численному решению задачи (1,2,5). Распределение электрического поля $E_0(x)$ при $t = t_i$ задавалось на основании соответствующего расчета процесса проникновения экранирующего тока, численного интегрирования уравнения (1) с условиями

$$E(x, 0) = 0, \partial E / \partial x(0, t) = -dB/dt, E(x_0, t) = 0 \quad (14)$$

для случая непрерывного увеличения магнитной индукции на поверхности сверхпроводника со скоростью $dB/dt = 1,0 T/c$.

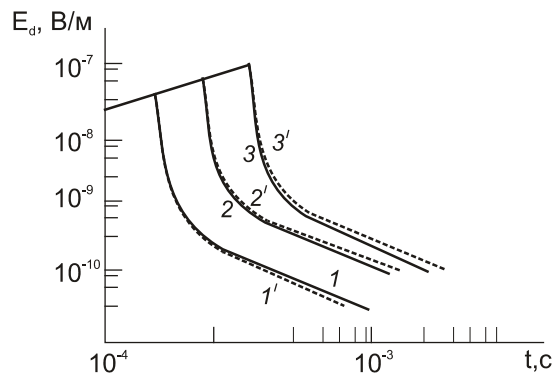


Рис. 2 – Изменение напряженности электрического поля на поверхности Nb-Ti сверхпроводника (Кривые 1,2,3 – численное решение; 1',2',3' – аналитическое решение задачи о вводе и релаксации экранирующего тока)

Представленные кривые, а также аналогичные расчеты, выполненные для высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), показывают, что предложенное аналитическое решение позволяет удовлетворительно описывать весь процесс релаксации в СП различных типов со степенной ВАХ.

Для иллюстрации описания аналитических решений на рис. 3,а приведены результаты расчета процесса релаксации напряженности электрического поля на поверхности СП из сплава НТ-50. Параметры его ВАХ принимались равными $E_c = 10^{-4} \text{ В/м}$, $J_c = 4 \cdot 10^9 \text{ А/м}^2$, $J_s = 4 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$. Скорость увеличения внешнего магнитного поля полагалась равной $dB/dt = 1.0 \text{ Т/с}$, а его нарастание прекращалось при $t \geq 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. Сплошные кривые соответствуют численному решению задачи о вводе и релаксации экранирующего тока, штриховые – аналитическому, использующему значение $E_{0,t}$, определенном в ходе численного решения задачи (4),(14). При этом предполагалось, что при $t < 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ короткий образец находится во внешнем магнитном поле, которое изменяется со скоростью $dB/dt = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ Т/с}$, возрастание поля прекращалось при $t \geq 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

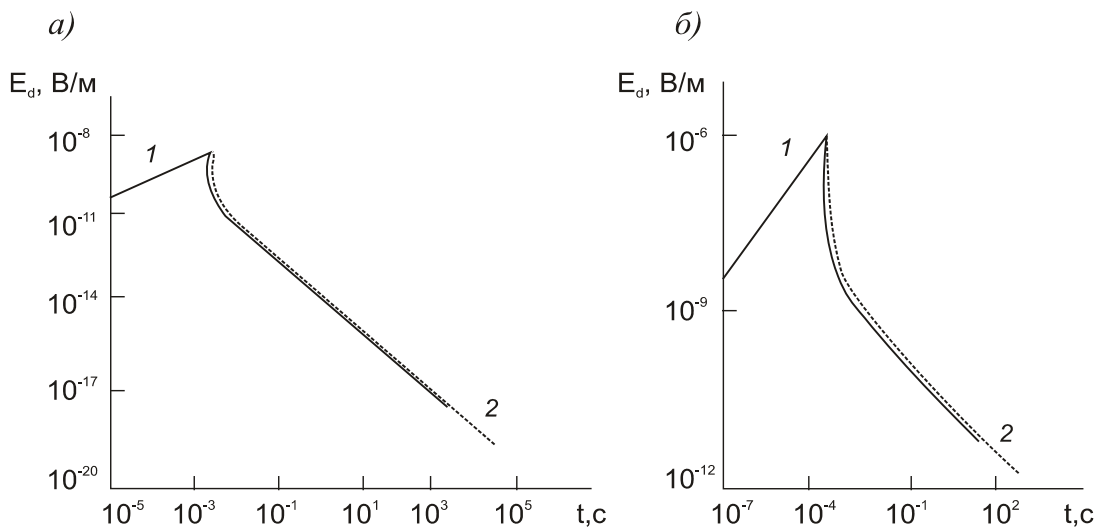


Рис. 3 – Изменение напряженности электрического поля на поверхности сверхпроводника: а) НТ-50, б) ВТСП.

Кривая 1 – численное решение при вводе и релаксации экранирующего тока; кривая 2 – аналитическое решение

На рис.3,б между собой сопоставлены результаты численного и аналитического расчетов, выполненных для ВТСП с параметрами

$$E_c = 10^{-8} \text{ В/см}, J_c = 1.15 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2, J_s = 8.7 \cdot 10^3 \text{ А/см}^2.$$

Выводы

Разработанные математические модели, построенные для них расчетные схемы и решения позволяют получить расчетные данные для анализа электромагнитных и тепловых процессов при проектировании и создании транспортных сверхпроводящих магнитных систем с различным типом сверхпроводников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзензерский В.А. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В.А. Дзензерский, В.И. Омеляненко, С.В. Василиев, В.И.Матин, С.А.Сергеев // Монография – Киев: Наукова думка, 2001 - 480 с.
2. Улсон М. Сверхпроводящие магниты./М. Улсон //-М.:Мир, 1985.-407с.
3. Гурьевич А.В. Физика композитных сверхпроводников./ А.В.Гуревич, Р.Г.Минц Р.Г., А.Л.Рахманов А.Л.// -М.: 1987.240 с.
4. Дзензерский В.А., Тепловое проектирование криомодулей транспортных средств/В.А.Дзензерский., В.Б. Веселовский, В.И. Ляшенко //Тепломассообмен – Тепломассообмен в энергетических устройствах и энергосбережение – Т 10, часть 2. Минск: Институт тепло-массообмена АН Беларуси, - 1996 г. С.28-32.
5. Ляшенко В.И. Математическое моделирование и расчет температурных полей криопор и тоководов транспортных средств /В.И. Ляшенко //

Матеріали регіональної наукової конференції «Прикладні проблеми аерогідродинамики та тепломасопереносу» ДНУ – Дніпропетровськ, 2006, С 106-107.

6. Веселовский В.Б., Задачи теплопроводности для составных сред с тепловой памятью /В.Б.Веселовский, Ю.А.Сова, Т.М.Босенко // Металлургическая теплотехника.–Днепропетровск:Пороги,2005. –С.20 – 31.

7. Ляшенко В.И. Релаксация электромагнитного поля внутри левитирующего сверхпроводника/ В.И. Ляшенко //Сб. материалов II міжнародної наукової конференції «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу». - Дніпропетровськ, ДНУ, 2008, С. 172-175.

8. Романовский В.Р., Особенности процессов магнитной релаксации в сверхпроводниках с различными моделями крипа. / Романовский В.Р.// ЖТФ,2003 том 73,вып.10, С 77-84.